Electromagnetismo e Optica (LEIC)

http://fisica.ist.utl.pt/~leic_f2

Prof. Amaro Rica da Silva
http://centra.ist.utl.pt/~amaro

1ª Semana, 17−21 Set
19:39:29

Definições iniciais

Definições Globais

Definições Gráficas

Definições Texto

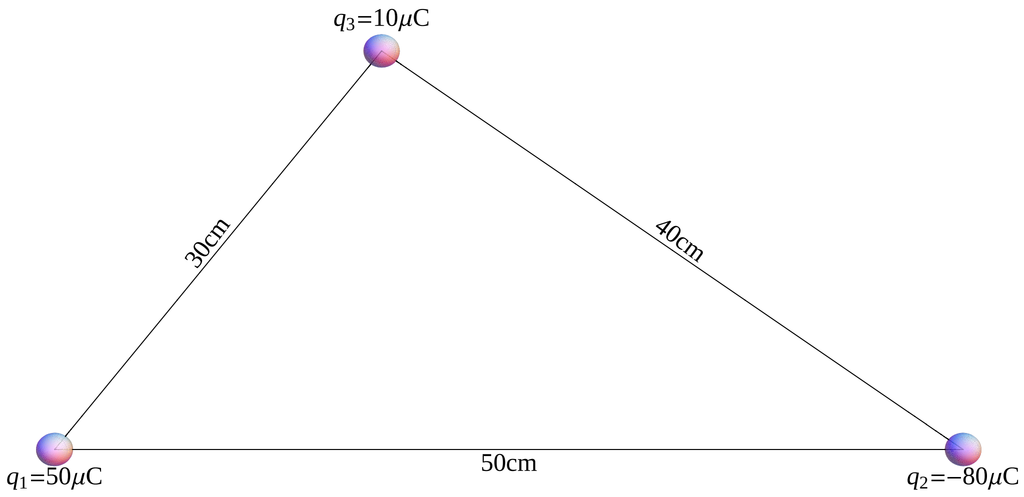
Serie I, Problema 1.2

Problema 1.2

A figura mostra três cargas formando um triângulo rectângulo. Determinar a força (vectorial) sobre a carga q_3.

Dados

$q_1 = 50 \times 10^{-6}$ (* Coulomb *) $q_2 = -80 \times 10^{-6}$ (* Coulomb *) $q_3 = 10 \times 10^{-6}$ (* Coulomb
;



Grandezas electrostáticas em unidades SI

SIUnits =

$q_e \to 1.602176462 \times 10^{-19}$ (* Coulomb *) *Carga do Electrão*

$\epsilon_o \to 8.854187817 \times 10^{-12}$ $\left(* \frac{\text{Ampere Segundo}}{\text{Metro Volt}} *\right)$ *Permitividade eléctrica do vácuo.*

$\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \to 10^{-7} \times c^2$ $\left(* \approx 9\times10^9 \frac{\text{Metro Volt}}{\text{Ampere Segundo}} *\right)$ *Constante Eléctrica*

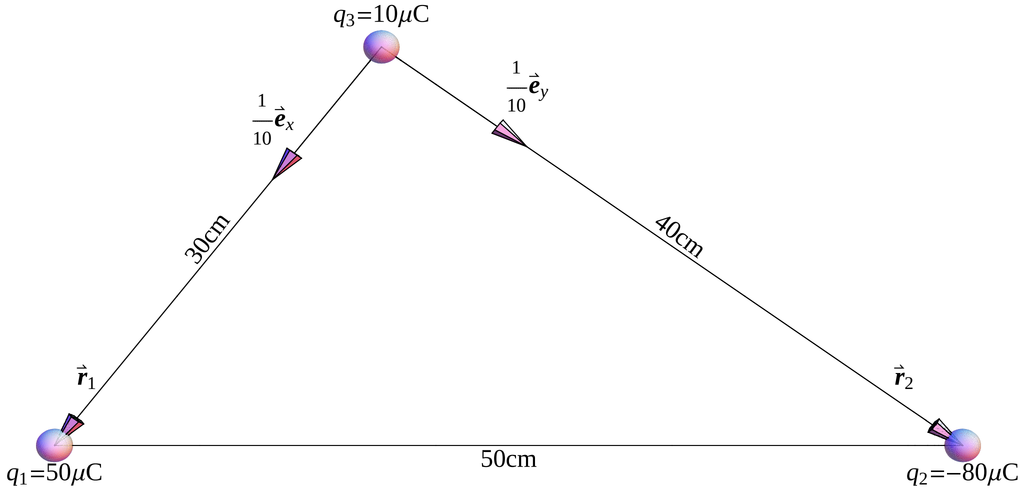
$c \to 299\,792\,458$ $\left(* \frac{\text{Metro}}{\text{Segundo}} *\right)$ *Velocidade da luz no vácuo.*

$^{T}[[1]];$

Serie I, Problema 1.2

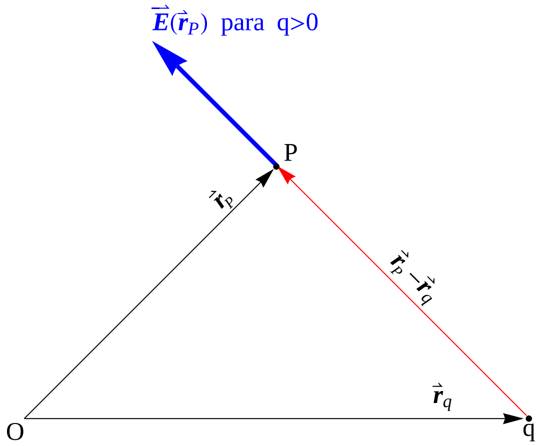
Solução−1

Começamos por escolher um sistema de referência adequado (origem + versores de base). Neste caso muito particular podemos colocar a origem na posição da carga q_3 e as direcções de referência segundo os catetos do triângulo rectângulo.



Lei de Coulomb — o campo criado na posição $\vec{r}$ por uma carga q na posição $\vec{r}_q$ é dado pela expressão:

$$\vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}, q, \vec{\mathbf{r}}_q] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_q|^2}\vec{\mathbf{u}}_{\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_q} \qquad (* \frac{N}{C} *). \qquad ;$$



- A distância $\left|\vec{r} - \vec{r}_q\right| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}_q)\cdot(\vec{r} - \vec{r}_q)} = \sqrt{(x - x_q)^2 + (y - y_q)^2 + (z - z_q)^2} = \sqrt{r^2 + r_q{}^2 - 2\,\vec{r}\cdot\vec{r}_q}$ é independente da escolha de origem ou direcções de referência.

- O versor $\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}_q} = \frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|}$ tem magnitude $|\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}_q}| = 1$ e aponta de $\vec{r}_q$ para $\vec{r}$.

- O campo eléctrico não é mais que a força sentida por uma carga unitária $Q = 1\,C$.

Serie I, Problema 1.2

- A força que uma carga Q sente quando colocada na posição $\vec{r}_Q$ no campo anterior é igual ao produto da carga pelo campo eléctrico.

$$\vec{F}[Q, \vec{r}_Q, q, \vec{r}_q] = Q\,\vec{E}[\vec{r}_Q, q, \vec{r}_q] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q\,q}{|\vec{r}_Q - \vec{r}_q|^2}\vec{u}_{\vec{r}_Q-\vec{r}_q} \qquad (*\ N\ *). \qquad ;$$

Sistema de referência $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, O.

$$\vec{e}_x = \{1, 0\} \qquad \vec{e}_y = \{0, 1\} \qquad \vec{O} = \{0, 0\}\ ;$$

Cargas e posições

$$\vec{r}_1 = \frac{3}{10}\vec{e}_x \qquad |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_1| = \frac{3}{10} \qquad \vec{u}_{\vec{r}_3-\vec{r}_1} = -\vec{e}_x$$

$$\vec{r}_2 = \frac{4}{10}\vec{e}_y \qquad |\vec{r}_3 - \vec{r}_2| = |\vec{r}_2| = \frac{4}{10} \qquad \vec{u}_{\vec{r}_3-\vec{r}_2} = -\vec{e}_y \qquad ;$$

$$\vec{r}_3 = \vec{O}$$

Força sobre a carga q_3

$$\vec{F}[q_3, \vec{O}, q_1, \vec{r}_1] == -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1\,q_3}{|\vec{r}_1|^2}\vec{e}_x \quad ; \qquad \vec{F}[q_3, \vec{O}, q_2, \vec{r}_2] == -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2\,q_3}{|\vec{r}_2|^2}\vec{e}_y \quad ;$$

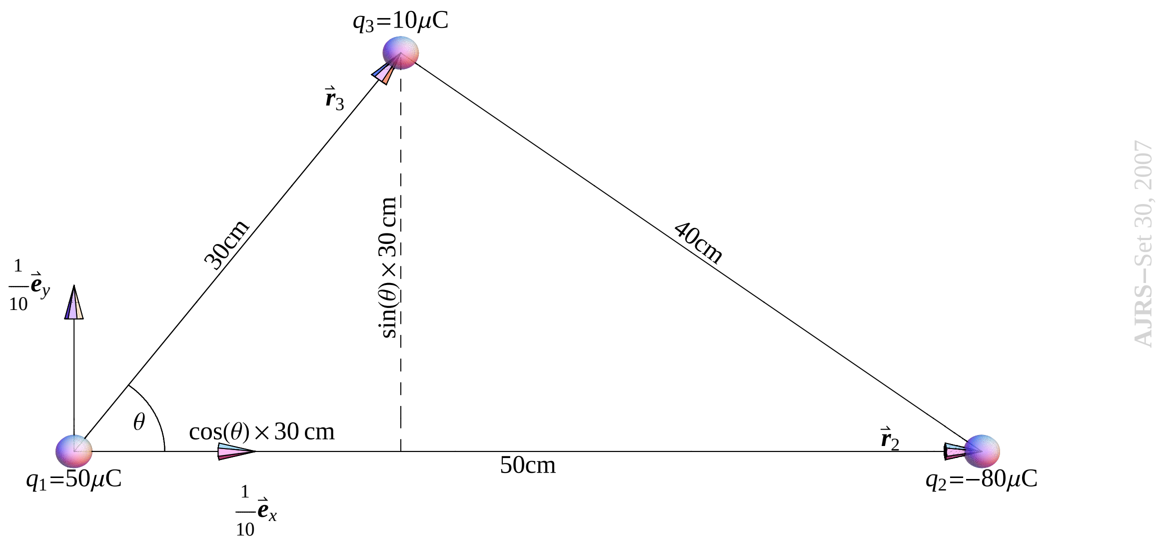
$$\vec{F}[q_3, \vec{O}] == \sum_q \vec{F}[q_3, \vec{O}, q, \vec{r}_q] == \frac{q_3}{4\pi\epsilon_o}\left(-\frac{q_1}{|\vec{r}_1|^2}\vec{e}_x - \frac{q_2}{|\vec{r}_2|^2}\vec{e}_y\right)$$

$$\vec{F}[q_3, \vec{O}] == 10\times10^{-6}\times9\times10^{9}\times\left(-\frac{50\times10^{-6}}{(3\times10^{-1})^2}\vec{e}_x + \frac{80\times10^{-6}}{(4\times10^{-1})^2}\vec{e}_y\right) = -50\,\vec{e}_x + 45\,\vec{e}_y \quad (*\ N\ *)$$

Serie I, Problema 1.2

Solução−2

No caso geral temos que poder resolver o problema sem auxílio de simetrias particulares. Para ilustrar vamos escolher a origem na posição da carga q_1 e os eixos $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ como indicado.



Dados

- **Sistema de referência**

$\vec{\mathbf{e}}_x = \{1,\ 0\}$ $\qquad\qquad$ $\vec{\mathbf{e}}_y = \{0,\ 1\}$ $\qquad\qquad$ $\overrightarrow{\mathbf{O}} = \{0,\ 0\}$;

- **Cargas e posições**

$q_1 = 50.\times 10^{-6}$ $\quad (* \text{ C } *)$ $\qquad$ $q_2 = -80.\times 10^{-6}$ $\quad (* \text{ C } *)$ $\qquad$ $q_3 = 10.\times 10^{-6}$ $\quad (* \text{ C } *)$;

$\theta = \text{ArcTan}\left[\frac{4}{3}\right]$ $\quad (* \text{ Rad } *)$; $\qquad$ *ângulo entre a hipotenusa e o cateto de 30 cm.* $\qquad$;

$\text{Cos}[\theta] \to \frac{3}{5}$ $\qquad\qquad$ $\text{Sin}[\theta] \to \frac{4}{5}$

$\vec{\mathbf{r}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{O}}$ $\qquad\qquad$ $(* \text{ m } *)$

$\vec{\mathbf{r}}_2 = \frac{5}{10}\,\vec{\text{e}}_x$ $\qquad\qquad$ $(* \text{ m } *)$

;

$\vec{\mathbf{r}}_3 == \frac{3}{10}\left(\text{Cos}[\theta]\,\vec{\mathbf{e}}_x + \text{Sin}[\theta]\,\vec{\mathbf{e}}_y\right)$ $\qquad$ $(* \text{ m } *)$

$\vec{\mathbf{r}}_3 = \frac{9}{50}\,\vec{\mathbf{e}}_x + \frac{12}{50}\,\vec{\mathbf{e}}_y$

Serie I, Problema 1.2

Campo eléctrico (=Força por unidade de carga)

$$\vec{E}[\vec{r}, q, \vec{r}_q] == \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3} (\vec{r}-\vec{r}_q) \qquad \textit{Campo eléctrico gerado por uma carga } q. \qquad ;$$

$$\vec{E}[\vec{r}_3] == \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3-\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3-\vec{r}_2) = (6.6\,\vec{e}_x + 1.3\,\vec{e}_y) \times 10^6 \quad (* \tfrac{N}{C} *)$$

Força que este campo exerce sobre uma carga q' na posição $\vec{r}_{q'}$

$$\vec{F}[Q, \vec{r}_Q, q, \vec{r}_q] = Q\,\vec{E}[\vec{r}_Q, q, \vec{r}_q]$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \vec{r}_3 = \tfrac{9}{50}\,\vec{e}_x + \tfrac{12}{50}\,\vec{e}_y \qquad |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_3| = \tfrac{3}{10}$$

$$\vec{r}_3 - \vec{r}_2 = -\tfrac{16}{50}\,\vec{e}_x + \tfrac{12}{50}\,\vec{e}_y \qquad |\vec{r}_3 - \vec{r}_1| = \sqrt{\left(\tfrac{16}{50}\right)^2 + \left(\tfrac{12}{50}\right)^2} == \tfrac{2}{5} \equiv \tfrac{4}{10}$$

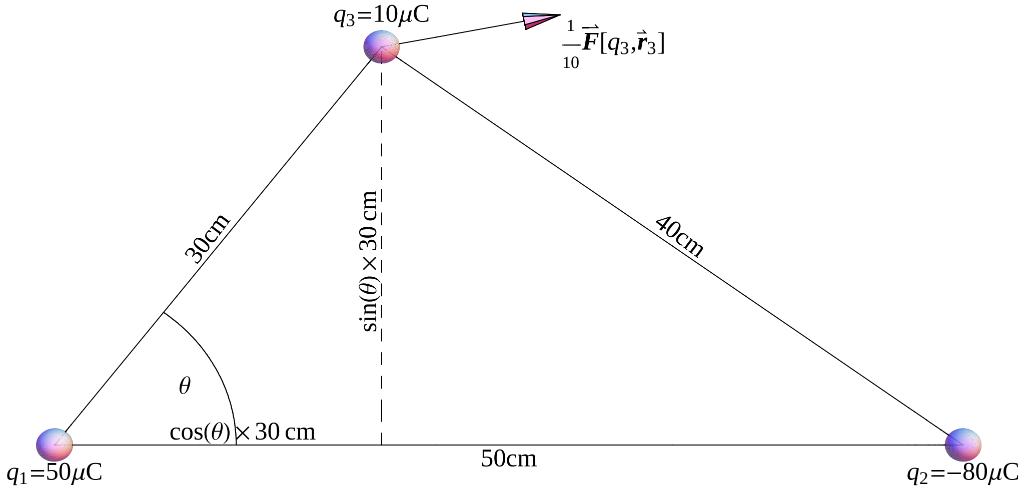
$$\vec{F}[q_3, \vec{r}_3] == q_3\,\vec{E}[\vec{r}_3] == \frac{q_3}{4\pi\epsilon_o} \left(\frac{q_1}{|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^3} (\vec{r}_3-\vec{r}_1) + \frac{q_2}{|\vec{r}_3-\vec{r}_2|^3} (\vec{r}_3-\vec{r}_2) \right)$$

$$\vec{F}[q_3, \vec{r}_3] = 9\times 10^9 \times 10 \times 10^{-6} \left(\frac{50\times 10^{-6}}{\left(\frac{3}{10}\right)^3} \left(\frac{9}{50}\,\vec{e}_x + \frac{12}{50}\,\vec{e}_y \right) + \frac{-80\times 10^{-6}}{\left(\frac{4}{10}\right)^3} \left(-\frac{16}{50}\,\vec{e}_x + \frac{12}{50}\,\vec{e}_y \right) \right) =$$

$$66\,\vec{e}_x + 13\,\vec{e}_y \qquad (* N *) \qquad ;$$

Embora as expressões para $\vec{F}$ sejam diferentes porque usamos referenciais distintos, a magnitude, direcção e sentido do vector é invariante: a rotação de um referencial para o outro transforma as componentes de $\vec{F}$ no primeiro referencial para as componentes de $\vec{F}$ no segundo referencial.

$$|\vec{F}[q_3, \vec{r}_3]| = \sqrt{50^2 + 45^2} = \sqrt{66^2 + 13^2} = 5\sqrt{181}$$



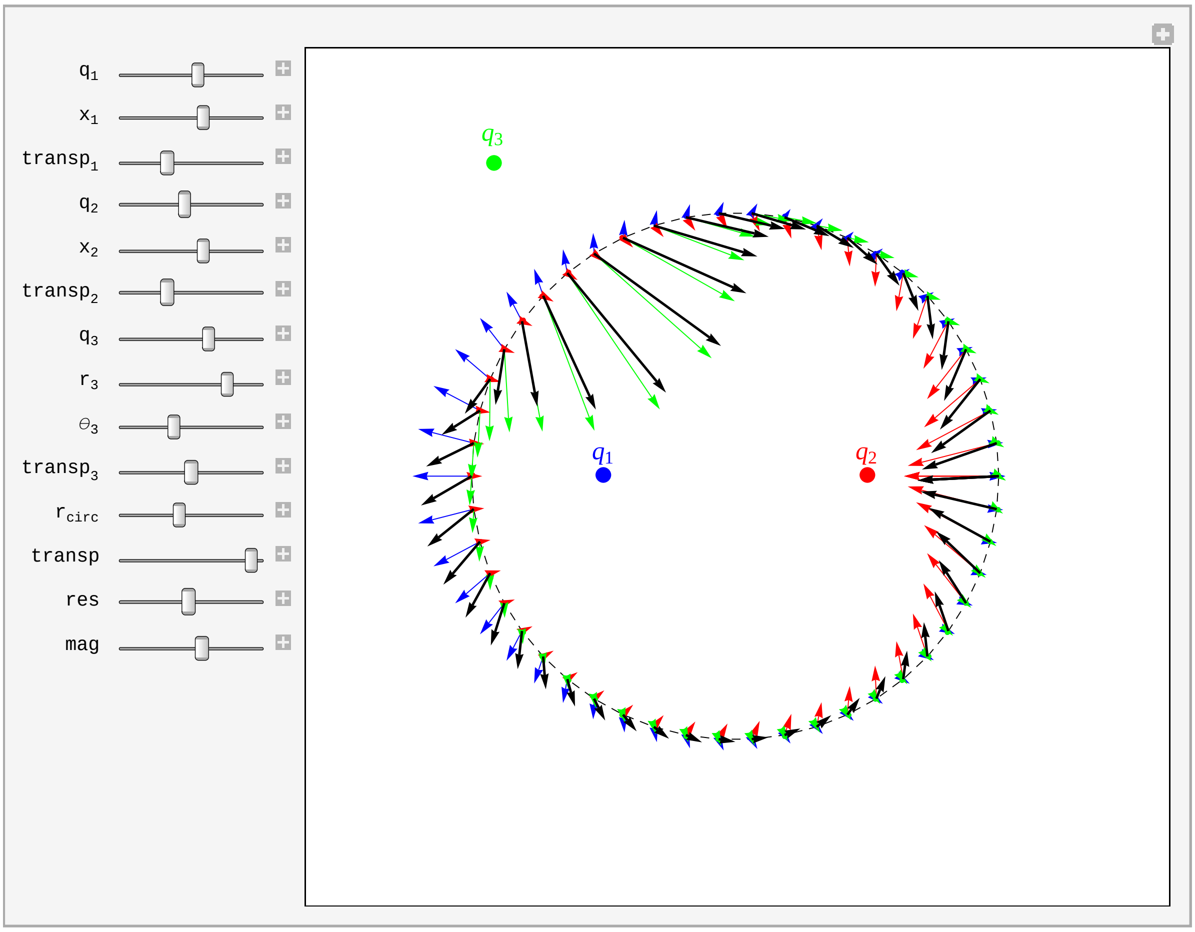
q_3=10μC
$\frac{1}{10}\vec{F}[q_3,\vec{r}_3]$
30cm
40cm
$\sin(\theta)\times 30$ cm
θ
$\cos(\theta)\times 30$ cm
50cm
q_1=50μC
q_2=−80μC

Serie I, Problema 1.2

Apêndice−Campo eléctrico de várias cargas pontuais

- O princípio de superposição em acção: use os cursores para mudar as cargas e suas posições.

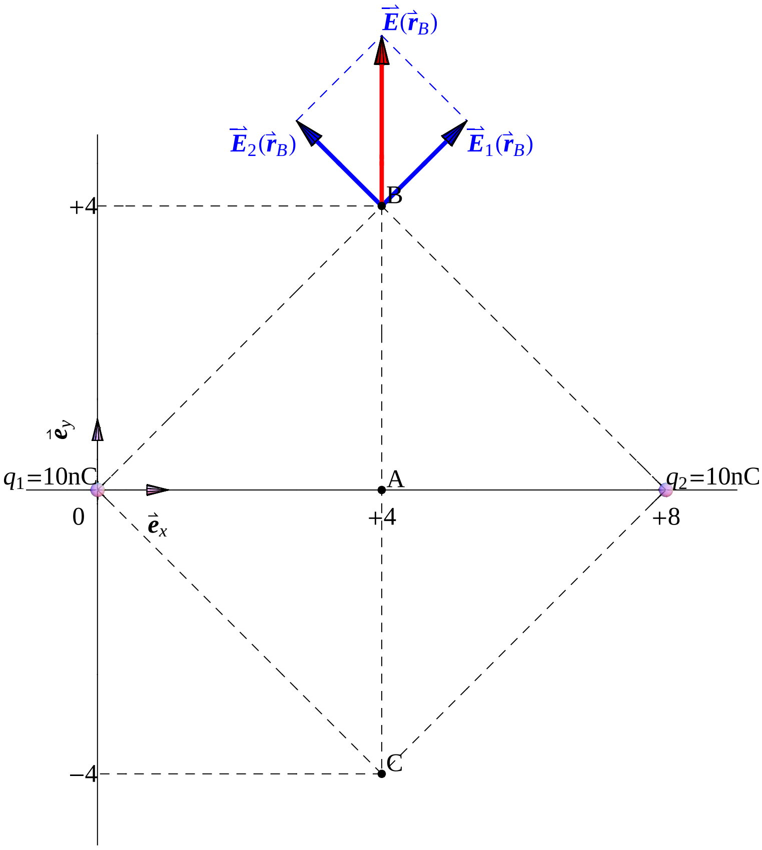
$$\vec{\mathbf{E}}[\vec{\mathbf{r}}] == \frac{1}{4\,\pi\epsilon_o}\sum_{q}\frac{q}{\left|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_q\right|^3}\left(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}_q\right)$$



Serie I, Problema 1.4

Problema 1.4

A figura mostra duas carga pontuais, cada uma com $10\,n\,C$, separadas de $8\,m$. Calcular o campo eléctrico nos pontos A, B e C.



Serie I, Problema 1.4

Dados

- **Cargas**

$q_1 = 10\times 10^{-9} \quad (* \, C \, *) \quad ; \qquad q_2 = 10\times 10^{-9} \quad (* \, C \, *);$

- **Posição das cargas**

$\vec{r}_1 = \vec{O} \qquad (* \, m \, *) \quad ; \qquad \vec{r}_2 = 8\,\vec{e}_x \qquad (* \, m \, *) \quad ;$

- **Pontos**

$\vec{r}_A = 4\,\vec{e}_x \quad (*m*); \qquad \left|\vec{r}_A - \vec{r}_1\right| == 4 \qquad \left|\vec{r}_A - \vec{r}_2\right| == 4$

$\vec{r}_B = 4\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y \quad (*m*); \qquad \left|\vec{r}_B - \vec{r}_1\right| == 4\sqrt{2} \qquad \left|\vec{r}_B - \vec{r}_2\right| == 4\sqrt{2} \;;$

$\vec{r}_C = 4\,\vec{e}_x - 4\,\vec{e}_y \quad (*m*); \qquad \left|\vec{r}_C - \vec{r}_1\right| == 4\sqrt{2} \qquad \left|\vec{r}_C - \vec{r}_2\right| == 4\sqrt{2}$

Campos

$$\vec{E}[\vec{r}_A] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1}{\left|\vec{r}_A - \vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_A - \vec{r}_1\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{\left|\vec{r}_A - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_A - \vec{r}_2\right) = 0 \qquad \left(* \, \frac{N}{C} \, *\right) \quad ;$$

$$\vec{E}[\vec{r}_B] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1}{\left|\vec{r}_B - \vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_1\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{\left|\vec{r}_B - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_2\right) =$$

$$9\times 10^9 \times \frac{10\times 10^{-9}}{\left(4\sqrt{2}\right)^3}\left(4\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y - 4\,\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_y\right) = \frac{45}{8\sqrt{2}}\,\vec{e}_y \quad \left(* \, \frac{N}{C} \, *\right)$$

$$\vec{E}[\vec{r}_C] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1}{\left|\vec{r}_C - \vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_C - \vec{r}_1\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{\left|\vec{r}_C - \vec{r}_2\right|^3}\left(\vec{r}_C - \vec{r}_2\right) =$$

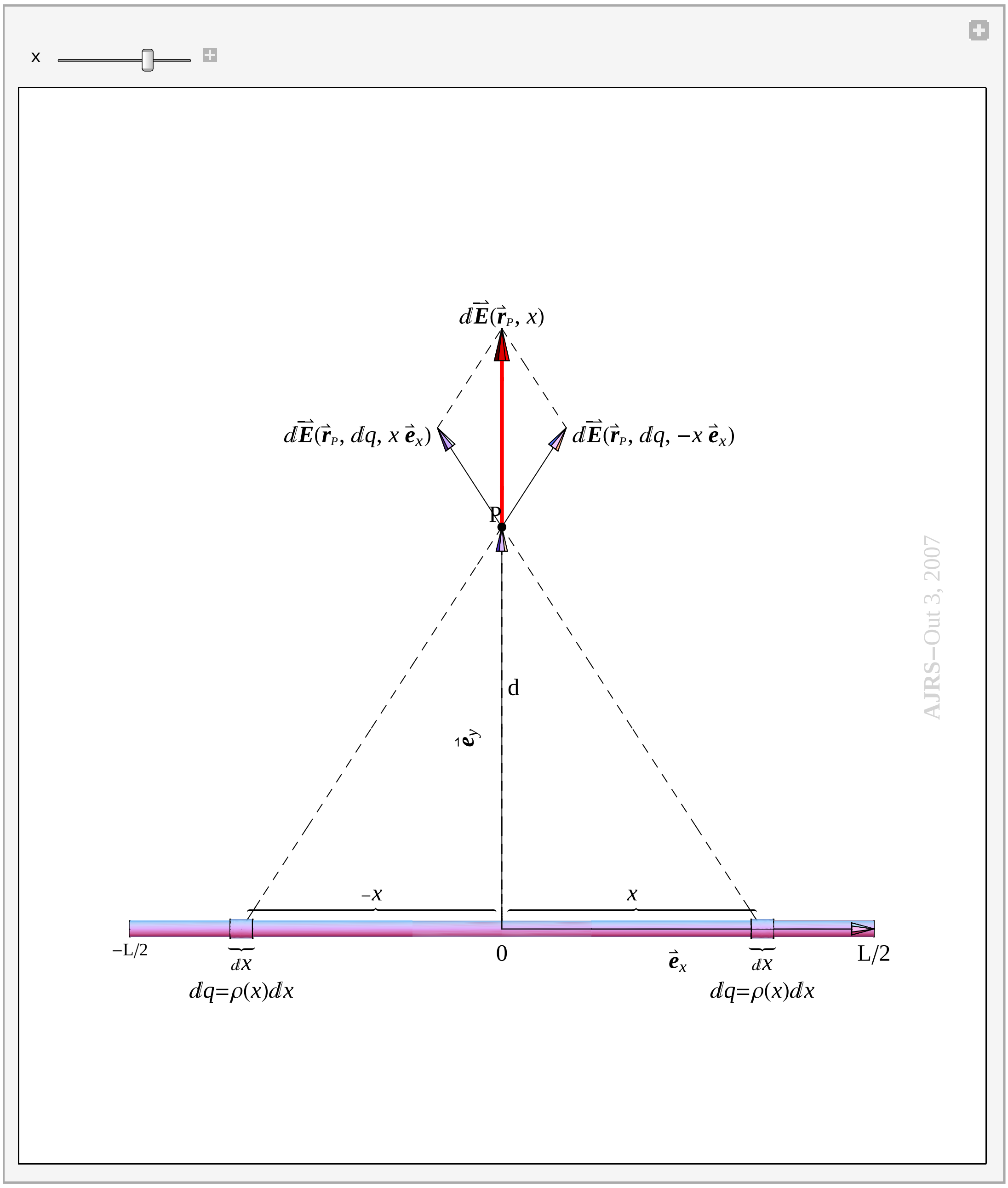
$$9\times 10^9 \times \frac{10\times 10^{-9}}{\left(4\sqrt{2}\right)^3}\left(4\,\vec{e}_x - 4\,\vec{e}_y - 4\,\vec{e}_x - 4\,\vec{e}_y\right) = -\frac{45}{8\sqrt{2}}\,\vec{e}_y \quad \left(* \, \frac{N}{C} \, *\right)$$

Serie I, Problema 1.5

Problema 1.5

Uma vareta de $\ell = 2\,m$ de comprimento está uniformemente carregada com uma carga $Q = 16 \times 10^{-10}$ C. Queremos calcular o campo eléctrico $\vec{E}$ num ponto P a uma distância $d = 1\,m$ do seu centro.

- Calcule o campo supondo que toda a carga Q se encontra no centro da vareta.
- Calcule o campo supondo que tem duas cargas $Q/2$ colocadas no centro das duas metades da vareta .



Serie I, Problema 1.5

Dados

Sistema de referência

$\vec{e}_x = \{1, 0, 0\}$ $\quad$ $\vec{e}_y = \{0, 1, 0\}$ $\quad$ $\vec{e}_z = \{0, 0, 1\}$
;

Caso (a)

Cargas e Posições

$q_1 = 16 \times 10^{-10}$ $\quad (*C*)$;

$\vec{r}_1 = \vec{O}$ $\quad (* m *)$;

$\vec{r}_P = \vec{e}_y$ $\quad (* m *)$;

Campo em P

$$\vec{E}[\vec{r}, q, \vec{r}_q] == \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_q|^3} (\vec{r} - \vec{r}_q)$$ *Campo eléctrico gerado por uma carga q.* ;

$$\vec{E}[\vec{r}_P] == \vec{E}[\vec{r}_P, q_1, \vec{r}_1] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1}{|\vec{r}_P|^3} \vec{r}_P = 9 \times 10^9 \times \frac{16 \times 10^{-10}}{1^3} \vec{e}_y = \frac{72}{5} \vec{e}_y \qquad (* \tfrac{N}{C} *);$$

Caso (b)

Cargas e Posições

$q_1 = q = 8 \times 10^{-10}$ $\quad (*C*)$; $\qquad q_2 = q = 8 \times 10^{-10}$ $\quad (*C*)$;

$\vec{r}_1 = -\frac{1}{2}\vec{e}_x$ $\quad (* m *)$; $\qquad |\vec{r}_P - \vec{r}_1| == |\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_x| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\vec{r}_2 = \frac{1}{2}\vec{e}_x$ $\quad (* m *)$; $\qquad |\vec{r}_P - \vec{r}_2| = |\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_x| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\vec{r}_P = \vec{e}_y$ $\quad (* m *)$;

Campo em P

$$\vec{E}[\vec{r}_P] == \vec{E}[\vec{r}_P, q_1, \vec{r}_1] + \vec{E}[\vec{r}_P, q_2, \vec{r}_2] = 9 \times 10^9 \times \frac{8 \times 10^{-10}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^3} \left(\left(\vec{e}_y + \frac{1}{2}\vec{e}_x\right) + \left(\vec{e}_y - \frac{1}{2}\vec{e}_x\right)\right) = \frac{576}{5^{5/2}} \vec{e}_y \qquad (* \tfrac{N}{C} *);$$

Serie I, Problema 1.5

Apêndice−Distribuição uniforme de carga

- Se a carga estiver uniformemente distribuida sobre a barra com densidade de carga $\lambda = \frac{Q}{L}$ constante, então o campo em P pode ser calculado como o somatório dos campos gerados pelas cargas $d q = \lambda\, d x$ de segmentos de comprimento $d x$ localizados em x e $-x$, à mesma distância de P.

$$\vec{r}_x = x\,\vec{e}_x \quad ; \quad \vec{r}_P - \vec{r}_x = -x\,\vec{e}_x + d\,\vec{e}_y \quad ; \quad \left|\vec{r}_P - \vec{r}_x\right| = \sqrt{x^2 + d^2}$$

$$\vec{r}_{-x} = -x\,\vec{e}_x \quad ; \quad \vec{r}_P - \vec{r}_{-x} = x\,\vec{e}_x + d\,\vec{e}_y \quad ; \quad \left|\vec{r}_P - \vec{r}_{-x}\right| = \sqrt{x^2 + d^2}$$

- Aplicando a Lei de Coulomb a estas duas cargas simétricamente colocadas obtemos uma expressão que depende apenas de x variável, e tem só a componente segundo $\vec{e}_y$.

$$d\vec{E}\left[\vec{r}_P, x\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\lambda\, d x}{x^2 + d^2}\left(\frac{-x\,\vec{e}_x + d\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + d^2}} + \frac{x\,\vec{e}_x + d\,\vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right) = \frac{1}{2\pi\epsilon_o}\frac{\lambda\ d}{\left(x^2 + d^2\right)^{3/2}}\, d x\,\vec{e}_y$$

- A soma em x de todas estas contribuições $d\vec{E}\left[\vec{r}_P, x\right]$ no limite em que $d x \to 0$ é equivalente a fazer o integral entre $x = 0$ e $x = L/2$.

$$\vec{E}[\vec{r}_P] == \int_0^{L/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{2\lambda\, d}{\left(x^2 + d^2\right)^{3/2}}\, d x\,\vec{e}_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{\frac{Q}{d}}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + d^2}}\,\vec{e}_y = \frac{36\sqrt{2}}{5}\,\vec{e}_y \ \left(*\ \frac{N}{C}\ *\right)$$

- Comparando com as aproximações (a) e (b) verificamos que $\left|\vec{E}_{(a)}[\vec{r}_P]\right| \simeq 14.4\ \frac{N}{C}$, $\left|\vec{E}_{(b)}[\vec{r}_P]\right| \simeq 10.3\ \frac{N}{C}$ enquanto que nesta distribuição uniforme de carga $\left|\vec{E}[\vec{r}_P]\right| \simeq 10.18\ \frac{N}{C}$.