Solução Geral da Equação de Fourier

Condições Iniciais

A equação de Fourier

(1) $$\nabla^2\,\theta(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}$$

sujeita às condições iniciais

(2) $$\theta(\boldsymbol{x},0) = f(\boldsymbol{x})$$

resolve-se utilizando a Transformação de Fourier em $\boldsymbol{x}$

(3)
$$\Theta(\boldsymbol{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \theta(\boldsymbol{x},t)\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$
$$F(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int f(\boldsymbol{x})\,e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}$$

Aplicando esta transformação a ambos os lados de (1) e (2) temos

(4) $$\left.\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\,\nabla^2\,\theta(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} &= -k^2\,\Theta(\boldsymbol{k},t) \\ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial\theta(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x} &= \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\Theta(\boldsymbol{k},t) \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial}{\partial t}\,\Theta(\boldsymbol{k},t) = -\alpha k^2\,\Theta(\boldsymbol{k},t)$$

e

(5) $$\Theta(\boldsymbol{x},0) = F(\boldsymbol{k}) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\Theta(\boldsymbol{k},t) = F(\boldsymbol{k})\;e^{-\alpha\,k^2 t}}$$

Introduzindo a função $H(\boldsymbol{k},t) = e^{-\alpha\,k^2\,t}$ vemos que a solução pretendida deve ser a convolução das transformadas inversas de $F(\boldsymbol{k})$ e $H(\boldsymbol{k},t)$, i.e. pondo

(6) $$h(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int H(\boldsymbol{k},t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\;\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \frac{1}{(2\alpha\,t)^{3/2}}\;e^{-\frac{x^2}{4\alpha\,t}}$$

temos de (5) e (6)

(7)
$$\theta(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \Theta(\boldsymbol{k},t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\;\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int F(\boldsymbol{k})H(\boldsymbol{k},t)\,e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\;\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$
$$= \big(f\star h\big)\,(\boldsymbol{x}) = \int f(\boldsymbol{x}')\,h(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}',t)\;\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'$$

ou seja

(8) $$\boxed{\theta(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\alpha\,t)^{3/2}}\int f(\boldsymbol{x}')\,e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^2}{4\alpha\,t}}\;\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}'}$$

Condições Fronteira

Existem várias possibilidades de condições sobre a fronteira $\mathcal{D}$ do domínio, entre as quais, quando $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{D}$,

(9)

$$\begin{cases} \theta(\boldsymbol{x}', t) = f(\boldsymbol{x}', t) & \text{A temperatura é especificada em qualquer instante na fronteira } \mathcal{D} \text{ através de } f(\boldsymbol{x}', t) \\ \nabla\theta(\boldsymbol{x}', t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}', t) & \text{A componente do fluxo } \boldsymbol{J}_q(\boldsymbol{x}', t) = -\kappa \nabla\theta(\boldsymbol{x}', t) \text{ na direcção normal } \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}') \text{ é especificado em qualquer instante na fronteira } \mathcal{D} \text{ através de } f(\boldsymbol{x}', t) \\ \nabla\theta(\boldsymbol{x}', t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}') = -\eta \left(\theta(\boldsymbol{x}', t) - \theta_\infty(t)\right) & \text{O fluxo de energia } \boldsymbol{J}_q(\boldsymbol{x}', t) = -\kappa \nabla\theta(\boldsymbol{x}', t) \text{ na fronteira } \mathcal{D} \text{ é devido a transporte, convecção e radiação para um meio a uma temperatura média } \theta_\infty(t) \end{cases}$$

Aplicando a Transformada de Laplace em tempo

(10)
$$\Theta(\boldsymbol{x}, s) = \int_0^\infty \theta(\boldsymbol{x}, t)\, e^{-s\,t}\, \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \theta(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Theta(\boldsymbol{x}, s)\, e^{s\,t}\, \mathrm{d}s$$

onde $c \in \mathbb{C}$ é escolhido de forma a deixar para a esquerda todos os pólos.

No primeiro caso indicado em (9) obter-se-ia, dada uma distribuição de temperatura inicial $\theta(\boldsymbol{x}, 0)$ conhecida,

(11)
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\partial\theta(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\, e^{-s\,t}\, \mathrm{d}t &= \frac{s}{\alpha}\, \Theta(\boldsymbol{x}, s) + \frac{1}{\alpha}\, \theta(\boldsymbol{x}, 0) \\ \int_0^\infty \nabla^2\theta(\boldsymbol{x}, t)\, e^{-s\,t}\, \mathrm{d}t &= \nabla^2\Theta(\boldsymbol{x}, s) \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left(\nabla^2 - \frac{s}{\alpha}\right) \Theta(\boldsymbol{x}, s) = \frac{1}{\alpha}\, \theta(\boldsymbol{x}, 0)$$

Esta é uma equação diferencial em $\boldsymbol{x}$ com condição fronteira

(12)
$$\Theta(\boldsymbol{x}', s) = F(\boldsymbol{x}', s) = \int_0^\infty f(\boldsymbol{x}', s)\, e^{-s\,t}\, \mathrm{d}t$$