5^{a} Aula Prática de TGF

LEFT-1° Semestre 2002/2003

Amaro Rica da Silva, Prof. Dep.Física - IST (7 de Dezembro, 2002)

PROBLEMA-1:CAMPOS INVARIANTES

Seja H_c o grupo $H_c = \left\{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 : \; h^2 > -c \;, \; \mathbf{h}\mathbf{h}' = (1 + \frac{h^2}{c})\mathbf{h}' + \mathbf{h}\right\}$

(2.1) – Mostre que H_c é de facto um grupo de Lie.

(2.2) – Determine todos os grupos-um-parâmetro de H_c.

(2.3) – Escreva a expressão geral de um campo $\mathbf{X} \in \mathcal{V}_{H_c}$ invariante à esquerda. Compare com a expressão geral de um campo $\mathbf{Y} \in \mathcal{V}_{H_c}$ invariante à direita.

(2.4) – Determine uma medida invariante sobre H_c. Existirá uma medida de Haar em H_c? Justifique.

PROBLEMA-2:GRUPO ROTAÇÕES

Considere o grupo das rotações $SO_3(\mathbb{R})$ do espaço Euclideano $\mathbb{R}^3$.

(4.1) – Mostre que qualquer elemento $g \in SO_3(\mathbb{R})$ se pode representar na forma

$$g(\varphi, \vartheta, \psi) = R_z(\varphi)R_y(\vartheta)R_z(\psi)$$

com $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \; \pi]$ e $\psi \in [0, 2\pi]$ onde

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad R_y(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & Cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

representam rotações à volta do eixo z e y, respectivamente.

(4.2) – Mostre que $SO_3(\mathbb{R})$ é difeomorfo à esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ com pontos antipodais identificados. Para isso mostre que $g \in SO_3(\mathbb{R})$ pode ser parametrizado por matrizes 3×3 ortogonais R com componentes

$$R_{ij}(\theta, \mathbf{n}) = \cos(\theta)\delta_{ij} + (1 - \cos(\theta))\, n_i n_j - \sin(\theta) \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} n_k \qquad (ij = 1, 2, 3)$$

onde $|\mathbf{n}|^2 = \sum_{k=1}^{3} n_k^2 = 1$ e $\theta \in [0, \pi]$.

(4.3) – Existe medida de Haar em $SO_3(\mathbb{R})$? Justifique.

(4.4) – Mostre que, em termos da parametrização (4.1), uma medida invariante em $SO_3(\mathbb{R})$ se escreve

$$d\,\mu(g) = d\,\mu(\varphi, \vartheta, \psi) = \frac{1}{8\pi^2}\, \sin(\vartheta) d\,\varphi\, d\,\vartheta\, d\,\psi$$

e em termos da parametrização (4.2) é

$$d\mu(g) = d\mu(\theta, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \sin(\frac{\theta}{2})^2 d\theta d\mathbf{n}$$

PROBLEMA-3: GERADORES DE MOVIMENTO

Considere o movimento dum carro numa superfície plana. Designe por θ o ângulo entre o eixo longitudinal do carro e a direcção das rodas da frente. Determine o espaço de configuração Q do carro.

(i) – Mostre que os "geradores infinitesimais" de pequenos movimentos na direcção indicada pelas rodas dianteiras são campos da forma

$$\mathbf{Y} = \sin(\theta)\partial_\varphi + \cos(\varphi + \theta)\partial_x + \sin(\varphi + \theta)\partial_y$$

onde (x, y) são coordenadas cartesianas no plano e φ uma coordenada angular especificando a direcção de movimento do carro.

(ii) – Que tipo de "movimento" gera o campo $\mathbf{X} = \partial_\theta$?

(iii) – Calcule os comutadores $\mathbf{Z} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ e $\mathbf{W} = [\mathbf{Z}, \mathbf{Y}]$. Dê uma interpretação física dos movimentos que eles geram.

PROBLEMA-4: GRUPO EUCLIDEANO

O grupo Euclideano E_n é um produto **SEMI-DIRECTO** $E_n \simeq H \circledS N$ com

- $H = SO_n(\mathbb{R}) := \left\{\mathbf{A} \in GL_n(\mathbb{R}) : \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A} = \mathbf{1}\ ;\ \mathrm{DET}(\mathbf{A}) = 1\right\}$, i.e. as rotações em $\mathbb{R}^n$ que deixam o volume invariante;
- $N = T^n \equiv (\mathbb{R}^n, +)$, i.e. o grupo abeliano das translações de $\mathbb{R}^n$.

Como conjunto $E_n \equiv SO_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ e o produto de elementos em E_n verifica a definição de produto semi-directo:

$$(\mathbf{A}, \mathbb{a})(\mathbf{B}, \mathbb{b}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B},\ \mathbf{A} \cdot \mathbb{b} + \mathbb{a})$$

(i) – Determine a dimensão do grupo E_n

(ii) – Mostre que o grupo Euclideano E_2 pode ser representado pelo grupo matricial

$$g(x, y, \theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ y & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

(iii) – Determine as medidas de Haar invariantes à esquerda e à direita em E_2.

PROBLEMA-5: TRANSFORMAÇÕES FRACCIONÁRIAS

Considere o grupo G de transformações lineares fraccionárias da recta R, i.e. transformações do tipo $x \mapsto \dfrac{a + b\,x}{1 + c\,x}$

(i) – Determine a sua álgebra de Lie G e construa todos os grupos-a-um-parâmetro de uma base de G. Mostre que o produto destes grupos-a-um parâmetro forma um grupo (dito canónico de segunda espécie) cuja álgebra de Lie é também G, e portanto localmente identifica-se com G.

(iii) – Deduza daqui a forma geral duma transformação do grupo canónico de segunda espécie, e mostre que o produto de grupo que daí se deduz é equivalente ao original do grupo G. Determine a medida de Haar sobre G.

PROBLEMA-6: LOTKE-VOLTERRA

Considere as equações de Lotke-Volterra $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = & (a - b\,y)\,x \\ \dfrac{dy}{dt} = & -(c + d\,x)\,y \end{cases}$ onde (a, b, c, d) são constantes.

Determine uma variedade simplética (M, ω) na qual estas são as equações de Hamilton dum sistema conservativo.

Estude a possibilidade de encontrar um segundo gerador de transformações canónicas que forme uma álgebra de Lie com o campo hamiltoneano destas equações.