3ª Série de TGF

LEFT-1° Semestre 2002/2003

Amaro Rica da Silva, Prof. Dep.Física - IST Entregar até 22 de Dezembro (16 de Dezembro, 2002)

GRUPO DE GALILEU

O grupo de Galileu é o grupo de transformações do espaço de fases estendido $M = \mathbb{R}^8$

$$\begin{cases} \mathbf{q} \to \Lambda \cdot \mathbf{q} + \mathbf{a}t + \mathbf{b} \\ \mathbf{p} \to \Lambda \cdot \mathbf{p} + m\mathbf{a} \\ t \ \to t + c \\ \mathcal{E} \to \mathcal{E} + \mathbf{a} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} |\mathbf{a}|^2 \end{cases} \qquad \text{onde} \quad \Lambda \cdot \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \cdot \Lambda = \mathbf{1}\,; \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3; \qquad c \in \mathbb{R}$$

(i) – Construa os geradores infinitesimais $\mathbf{X}$ do grupo de Galileu assim parametrizado, e determine as respectivas funções hamiltonianas, i.e. as funções $f_{\mathbf{X}} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{R}}(M)$ que verificam

$$X^i = \dot{q}^i = \partial_{p_i} f_{\mathbf{X}} \quad , \quad X^{i+4} = \dot{p}_i = -\partial_{q^i} f_{\mathbf{X}} \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

(ii) – Mostre que os geradores infinitesimais $\mathbf{X}$ formam uma álgebra de Lie, determine as constantes de estrutura e compare-as com as dos correspondentes parêntesis de Poisson das suas funções hamiltonianas $f_{\mathbf{X}}$.

REPRESENTAÇÃO ADJUNTA, FORMA DE KILLING

Os campos de vectores

$$\mathbf{e}_1 = (y\,u^2 - x\,v)\,\partial_x - (x\,u + 2\,y\,v)\,\partial_y + 2\,u\,v\,\partial_u + (\tfrac{3}{2}\,v^2 - \tfrac{2}{3}\,u^3)\,\partial_v \qquad \mathbf{e}_3 = \partial_v$$

$$\mathbf{e}_2 = x\,\partial_x + 2\,u\,\partial_u + 3\,v\,\partial_v \qquad \mathbf{e}_4 = x\,\partial_x + y\,\partial_y$$

aparecem no estudo das simetrias da dinâmica $\begin{cases} \partial_y u = \partial_x v \\ \partial_y v = -u\,\partial_x u \end{cases}$ do escoamento ultrasónico de um gás bi-dimensional no regime estacionário.

(i) – Mostre que o espaço $\mathcal{G}$ gerado por vectores da forma $\mathbf{X} = X^i\mathbf{e}_i$ é uma álgebra de Lie e determine os grupos-a-um-parâmetro que geram.

(ii) – Usando agora a base $\mathbf{f}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2 = 2\,\mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{f}_4 = \mathbf{e}_4$ calcule a **REPRESENTAÇÃO ADJUNTA** de $\mathcal{G}$, $\mathbf{ad} : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \to \mathcal{G}$, $\mathbf{ad}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, e determine a **FORMA DE KILLING** $K(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ que lhe está associada. Verifique se $\mathcal{G}$ é semi-simples.

(iii) – Finalmente, construa a representação adjunta do grupo de automorfismos internos de $\mathcal{G}$, i.e. o grupo gerado pelos automorfismos $\Phi^{\mathbf{X}}_t(\mathbf{Y}_0)$, associados a cada elemento $\mathbf{X} \in \mathcal{G}$, e definidos pela solução da equação

$$\frac{d\,\mathbf{Y}}{d\,t} = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] \qquad (\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0)$$

e mostre que $K(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ é um invariante para este grupo.