CAPÍTULO 3

TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

Conteúdo

3.1 REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS

A teoria de **REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS** estuda os homomorfismos

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : G &\longrightarrow \mathrm{AUT}(V) \\ g, \tilde{g} &\mapsto \mathbf{R}_g, \mathbf{R}_{\tilde{g}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R}_{g\tilde{g}} = \mathbf{R}_g \mathbf{R}_{\tilde{g}} \end{aligned}$$

entre grupos arbitrários G e o grupo $\mathrm{AUT}(V)$ de **OPERADORES LINEARES INVERTÍVEIS** num espaço vectorial V, que pode ter dimensão finita ou infinita. Neste sentido se diz que $\mathbf{R}$ é uma **REALIZAÇÃO LINEAR** ou **REPRESENTAÇÃO** de G num grupo de transformações lineares. No caso de V ser um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$, este grupo de transformações lineares é $\mathrm{AUT}(V) = GL_n(\mathbb{K})$

– A dimensão deste espaço vectorial é a **DIMENSÃO DA REPRESENTAÇÃO** .

– Um dado grupo pode ter representações de dimensão **FINITA** e **INFINITA**.

DEFINIÇÃO [3.1]

III.1 - i . Para G um grupo qualquer, duas representações $\mathbf{R}^{(i)} : G \to \mathrm{AUT}(V_i)$, $i = (1, 2)$, dizem-se **EQUIVALENTES** se existir uma aplicação linear **INVERTÍVEL** $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ entre os espaços vectoriais V_1 e V_2, suportes das representações $\mathbf{R}^{(i)}$ respectivas, tal que

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^{(2)}\mathbf{A}$$

III.1 - ii . Uma representação $\mathbf{U} : G \to \mathrm{AUT}(V)$ de G diz-se **UNITÁRIA** se se tiver

$$\mathbf{U}_g^{\dagger}\mathbf{U}_g = \mathbf{U}_g\mathbf{U}_g^{\dagger} = \mathbf{1} \qquad \forall\, g \in G$$

III.1 - iii . Uma representação $\mathbf{R} : G \to \mathrm{AUT}(V)$ de G diz-se **REDUTÍVEL** se existe em V algum sub-espaço **NÃO-TRIVIAL**, **INVARIANTE** relativamente a todas as transformações $\mathbf{U}_g \in \mathrm{AUT}(V)$, $\forall\, g \in G$.

Uma vez que as representações se dividem em **CLASSES DE EQUIVALÊNCIA** através da relação

$$\mathbf{R}^{(1)} \approx \mathbf{R}^{(2)} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists A \in \mathcal{L}(V_1, V_2) : \ \mathbf{R}_g^{(1)} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{R}_g^{(2)}\mathbf{A}\,,\ \forall\, g \in G)$$

a determinação de representações fica reduzida à determinação de representações **INEQUIVALENTES.** Neste contexto iremos mostrar que:

- cada classe de equivalência de representações dum **GRUPO FINITO** G possui **REPRESENTAÇÕES UNITÁRIAS** .
- Para um grupo finito G, o número de classes de representações inequivalentes é igual ao número de **CLASSES DE CONJUGAÇÃO** de G.
- A soma do quadrado das dimensões das representações associadas às diferentes classes de conjugação de G é igual à ordem de G.
- A dimensão de cada representação irredutível é um **DIVISOR** do índex de qualquer sub-grupo **ABELIANO NORMAL** de G e um divisor de $o(G)$. Esta dimensão não excede o index de subgrupos abelianos de G.
- Todo o caracter de G é uma combinação linear dos caracteres de representações **INDUZIDAS** por subgrupos cíclicos e combinação linear inteira de caracteres de representações induzidas de representações unidimensionais de subgrupos.

EXERCÍCIO [3.1]

Dado um espaço vectorial V com um produto escalar $(\ ,\ )$ entre os seus vectores, defina um novo produto escalar através de

$$\langle\, \mathbb{v},\ \tilde{\mathbb{v}}\,\rangle = \frac{1}{o[G]}\sum_{g \in G}(\mathbf{R}_g\mathbb{v}, \mathbf{R}_g\tilde{\mathbb{v}}) \qquad ; \qquad \forall\, \mathbb{v},\ \tilde{\mathbb{v}} \in V$$

III.1 - i . Mostre que o produto escalar assim definido sobre qualquer espaço vectorial V suporte de uma representação **R** de G é bilinear e não-negativo (i.e. ≥ 0).

III.1 - ii . Dada uma base $\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \ldots, \mathbb{e}_d$ **ORTONORMAL** relativamente ao produto escalar $(\,.\,,\,.)$ original de V, é possível definir uma nova base $\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2, \ldots, \mathbb{f}_d$ ortonormal relativamente ao novo produto escalar $\langle\,,\,\rangle$. Se **A** representar o operador de correspondência $\mathbf{A}\,\mathbb{e}_i = \mathbb{f}_i$, mostre que então $\langle \mathbf{A}\,\mathbb{v},\, \mathbf{A}\,\tilde{\mathbb{v}}\rangle = (\mathbb{v},\, \tilde{\mathbb{v}})$.

III.1 - iii . Por outro lado, mostre que no novo produto escalar $\langle \mathbf{R}_{g'}\mathbb{v}, \mathbf{R}_{g'}\,\tilde{\mathbb{v}}\rangle \equiv \langle \mathbb{v},\, \tilde{\mathbb{v}}\rangle$ e conclua que a representação $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}\,\mathbf{A}$ verifica a condição de unicidade requerida

$$(\,\tilde{\mathbf{R}}_{g'}\mathbb{v},\, \tilde{\mathbf{R}}_{g'}\,\tilde{\mathbb{v}}) = \langle \mathbf{R}_{g'}\mathbf{A}\,\mathbb{v}, \mathbf{R}_{g'}\mathbf{A}\,\tilde{\mathbb{v}}\rangle \equiv \langle \mathbf{A}\mathbb{v}, \mathbf{A}\,\tilde{\mathbb{v}}\rangle = (\mathbb{v},\, \tilde{\mathbb{v}})$$

Este resultado pode ser estendido a **GRUPOS COMPACTOS**, porque, como veremos adiante, aí existe uma **MEDIDA DE HAAR** $d\mu(g)$ tal que a medida do grupo inteiro $\mu(G) = \int_G d\mu(g) < \infty$, permitindo assim a redifinição do produto escalar para

$$\langle \mathbb{v},\, \tilde{\mathbb{v}}\rangle = \frac{1}{\mu(G)} \int_G (\mathbf{R}_g\mathbb{v}, \mathbf{R}_g\,\tilde{\mathbb{v}})d\mu(g)$$

TEOREMA [3.2]

Se G for um grupo **FINITO** ou **COMPACTO**, qualquer representação de **DIMENSÃO FINITA** é equivalente a uma representação **UNITÁRIA**.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\mathbf{R} : G \to \mathrm{AUT}(V)$ uma representação de G, **NÃO NECESSÁRIAMENTE** unitária. Vamos mostrar que existe uma aplicação linear invertível $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{S}\,\mathbf{R}_g\,\mathbf{S}^{-1}$$

é **UNITÁRIA** para todo o $g \in G$, i.e. $\mathbf{U}_g^{\dagger}\mathbf{U}_g = \mathbf{1},\ \forall g \in G$

Faremos a demonstração para G finito: a generalização para o caso compacto apenas substitui o somatório discreto pelo integral com medida de Haar no grupo. Construa-se o operador

$$\mathbf{T} = \sum_{g\in G} \mathbf{R}_g^{\dagger}\mathbf{R}_g \qquad \left(\text{ou} \quad \mathbf{T} = \int_G \mathbf{R}_g^{\dagger}\mathbf{R}_g d\mu(g)\,, \quad \text{onde} \quad d\mu(g) = \sum_{g' \in G} \delta(g - g')dg\right)$$

T é evidentemente **HERMÍTICA**, i.e. $\mathbf{T}^{\dagger} = \mathbf{T}$. Que **T** é também estritamente positiva resulta de:

$$(\mathbb{v}, \mathbf{T}\mathbb{v}) = \sum_{g\in G} (\mathbb{v}, \mathbf{R}_g^{\dagger}\mathbf{R}_g\mathbb{v}) = \sum_{g\in G} (\mathbf{R}_g\mathbb{v}, \mathbf{R}_g\mathbb{v}) \geq 0$$

e se $\mathbb{v} \neq 0$ então $(\mathbb{v}, \mathbf{T}\mathbb{v}) > 0$ porque

$$(\mathbb{v}, \mathbf{T}\mathbb{v}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{g\in G} \|\, \mathbf{R}_g\mathbb{v}\,\|^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R}_g\mathbb{v} = \mathbf{0}\ (\forall g \in G) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{v} = \mathbf{0}$$

Isto significa que $\mathbf{T}$ tem uma **DECOMPOSIÇÃO POLAR** num produto da forma $\mathbf{T} = \mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}$ com

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \mathbf{A}$$

($\lambda_i > 0$), onde $\mathbf{A}$ é uma matriz unitária que diagonaliza $\mathbf{T}$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{T}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dado que, pela definição

$$\mathbf{R}_h^\dagger\,\mathbf{T}\,\mathbf{R}_h = \sum_{g\in G} \mathbf{R}_{gh}^\dagger\,\mathbf{R}_{gh} = \mathbf{T}$$

tem-se também

$$\mathbf{R}_h^\dagger\,\mathbf{S}^\dagger\,\mathbf{S}\,\mathbf{R}_h = \mathbf{S}^\dagger\,\mathbf{S} \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{S}\mathbf{R}_h\,\mathbf{S}^{-1})^\dagger\,(\mathbf{S}\,\mathbf{R}_h\,\mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{1}$$

pelo que a Representação unitária equivalente requerida é

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{S}\mathbf{R}_g\mathbf{S}^{-1}$$

A situação é menos favorável para grupos **NÃO-COMPACTOS**. Assim, por exemplo, para grupos G não-compactos **SIMPLES** (i.e. não possuindo nenhum sub-grupo PRÓPRIO, CONEXO E INVARIANTE) pode-se mostrar que **NÃO EXISTEM** representações **UNITÁRIAS** de **DIMENSÃO FINITA** além da trivial (identidade). Nesta categoria encontram-se grupos de simetria importantes da física, como o grupo de **LORENTZ**, $SO(3,1)$ ou de **DE SITTER**, $SO(4,1)$.

Se G for não-compacto sem ser simples, então as representações unitárias de G ou são de dimensão infinita, ou finita mas infiel (i.e. diferentes elementos de G têem a mesma matriz como representação). Mais grave é que neste caso G pode possuir representações de dimensão finita que não são equivalentes a nenhuma representação unitária: por exemplo, o grupo multiplicativo $\mathbb{R}_+$ dos reais positivos tem representações **UNIDIMENSIONAIS** $\mathbf{U}^{(\beta)}(x) = \beta \log(x)$, parametrizadas por $\beta > 0$, que não se podem transformar por semelhança em representações unitárias. O grupo Euclideano, produto semi-directo $O(3) \rtimes \mathbb{R}^3$ é outro exemplo: nenhuma representação de dimensão finita na qual as translações sejam representadas não-trivialmente é equivalente a uma representação unitária.

3.2 REPRESENTAÇÕES REDUTÍVEIS DE GRUPOS

Uma representação **R** : $G \to \mathrm{AUT}(V)$ de G em V é dita **REDUTÍVEL** se existe em V algum sub-espaço **INVARIANTE** relativamente a todas as operações $\mathbf{U}_g$, $\forall\, g \in G$. Para grupos finitos ou compactos, tem-se

[REPRESENTAÇÃO COMPLETAMENTE REDUTÍVEL]

DEFINIÇÃO [3.3]

Uma representação **R** de G é **COMPLETAMENTE REDUTÍVEL** se se puder escrever na forma

$$\mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_g \end{pmatrix} \quad , \quad \forall g \in G$$

onde $\mathbf{A}_g$ $\mathbf{B}_g$ são matrizes quadradas irredutíveis ou igualmente completamente redutíveis.

[TEOREMA DE MASCHKE]

TEOREMA [3.4]

Qualquer representação de dimensão finita de um grupo G **FINITO** ou **COMPACTO** é **COMPLETAMENTE REDUTÍVEL.**

DEMONSTRAÇÃO

Uma representação redutível pode ser sempre transformada numa equivalente da forma $\mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{N}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \end{pmatrix}$ bastando para isso reordenar os seus vectores de base de forma que os últimos m sejam todos elementos do subespaço de V deixado invariante pela representação **R**. Por outro lado, de

$$\mathbf{R}_{g'g} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{g'g} & \mathbf{N}_{g'g} \\ 0 & \mathbf{B}_{g'g} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{g'}\mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{g'}\mathbf{A}_g & \mathbf{A}_{g'}\mathbf{N}_g + \mathbf{N}_{g'}\mathbf{B}_g \\ 0 & \mathbf{B}_{g'}\mathbf{B}_g \end{pmatrix}$$

podemos ver que $\mathbf{N}_{g'g} = \mathbf{A}_{g'}\mathbf{N}_g + \mathbf{N}_{g'}\mathbf{B}_g$. Fazendo $g' = g^{-1}$ devemos obter $\mathbf{A}_{g^{-1}} = \mathbf{A}_g^{-1}$, $\mathbf{B}_{g^{-1}} = \mathbf{B}_g^{-1}$ e $\mathbf{A}_{g^{-1}}\mathbf{N}_g + \mathbf{N}_{g^{-1}}\mathbf{B}_g = 0$ donde $\mathbf{N}_{g^{-1}} = -\mathbf{A}_g^{-1}\mathbf{N}_g\mathbf{B}_g^{-1}$. Assim $\mathbf{R}_g$ tem inversa

$$\mathbf{R}_g^{-1} = \mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g^{-1} & -\mathbf{A}_g^{-1}\mathbf{N}_g\mathbf{B}_g^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^{-1} \end{pmatrix}$$

As matrizes $\mathbf{A}_g$, $\mathbf{B}_g$ verificam as condições $\mathbf{A}_{g'g} = \mathbf{A}_{g'}\mathbf{A}_g$ e $\mathbf{B}_{g'g} = \mathbf{B}_g\mathbf{B}_{g'}$ necessárias para que $\tilde{\mathbf{R}}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \end{pmatrix}$ seja ainda uma representação de G. Procuramos assim uma matriz **S** invertível que verifique a condição de equivalência $\mathbf{R}_g = \mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{R}}_g\,\mathbf{S}^{-1}$ ou, o que é o mesmo, $\mathbf{R}_{g'}\mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \mathbf{S}$. A matriz

$$\mathbf{S} = \sum_{g\,\in\,G} \mathbf{R}_g\,\tilde{\mathbf{R}}_g^{-1}$$

verifica fácilmente essa identidade:

$$\mathbf{R}_{g'}\mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \sum_{g\,\in\,G} \mathbf{R}_{g'}\,\mathbf{R}_g\,\tilde{\mathbf{R}}_g^{-1}\,\tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \sum_{g'\,\in\,G} \mathbf{R}_{g'g}\,\tilde{\mathbf{R}}_{g'g}^{-1} = \mathbf{S}$$

porque a soma em $g'g$ também percorre todos os elementos de G apenas uma vez, mas por ordem diferente. De facto

$$\mathbf{S} = \sum_{g\,\in\,G} \mathbf{R}_g\,\tilde{\mathbf{R}}_g^{-1} = \sum_{g\,\in\,G} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{N}_g \\ 0 & \mathbf{B}_g \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_g^{-1} \end{pmatrix} = \sum_{g\,\in\,G} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g\,\mathbf{A}_g^{-1} & \mathbf{N}_g\,\mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \mathbf{B}_g\,\mathbf{B}_g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega\,\mathbf{I}_n & \sum_{g\,\in\,G} \mathbf{N}_g\,\mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \Omega\,\mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{g'}.\mathbf{S}.\,\tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \sum_{g\,\in\,G} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & (\mathbf{N}_{g'}\,\mathbf{B}_g + \mathbf{A}_{g'}\,\mathbf{N}_g)\,\mathbf{B}_{g'}^{-1}\,\mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega\,\mathbf{I}_n & \sum_{g\,\in\,G} \mathbf{N}_{g'g}\,\mathbf{B}_{g'g}^{-1} \\ 0 & \Omega\,\mathbf{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega\,\mathbf{I}_n & \sum_{g\,\in\,G} \mathbf{N}_g\,\mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \Omega\,\mathbf{I}_m \end{pmatrix} = \mathbf{S}$$

sendo

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega^{-1}\,\mathbf{I}_n & -\Omega^{-2}\sum_{g\,\in\,G} \mathbf{N}_g\,\mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \Omega^{-1}\,\mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

A demonstração para grupos compactos corre da mesma forma apenas com a substituição de $\mathbf{S}$ por

$$\mathbf{S} = \int_G d\,\mathbf{R}_{g'}\;\mathbf{R}_{g'}\,\tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega\,\mathbf{I}_n & \int_G d\,\mathbf{R}_{g'}\,\mathbf{N}_{g'}\,\mathbf{B}^{-1}{}_{g'} \\ \mathbf{0} & \Omega\,\mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

onde $\Omega = \int_G d\,\mathbf{R}_g$ é o "volume" (número de elementos) de G. É agora fácil de mostrar que

$$\mathbf{R}_g\mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{R}}_g^{-1} = \mathbf{S} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}_g\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{R}}_g$$

já que $d\,\mathbf{R}_{g'} = d\,\mathbf{R}_{gg'}$ é uma medida invariante (medida de Haar invariante à esquerda, que existe sempre em qualquer grupo localmente compacto). Vemos igualmente porque é que o resultado falha quando o grupo não tem um "volume" finito Ω. ■

3.3 REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS DE GRUPOS

[1º LEMA DE SCHUR]

LEMA [3.5]

Sejam $\mathbf{U}^{(1)}$ e $\mathbf{U}^{(2)}$ representações **IRREDUTÍVEIS**, de dimensões d_1 e d_2, dum grupo G.
Se existir uma $d_2 \times d_1$-matriz $\mathbf{A}$ tal que

$$\mathbf{A}\,\mathbf{U}_g^{(1)} = \mathbf{U}_g^{(2)}\,\mathbf{A} \qquad \forall\, g \in G$$

então uma das seguintes condições se verifica :

III.5 - i . $\mathbf{A} = 0$

III.5 - ii . $d_1 = d_2$ e $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO

Por definição de irredutibilidade, os espaços vectoriais $V_{(1)}$ e $V_{(2)}$ não possuem sub-espaços próprios invariantes para as representações lineares $\mathbf{U}^{(k)} : G \to Aut(V_{(k)}) \quad (k = 1, 2)$ de G.

Então, escolham-se bases $(\mathbb{e}_1, \mathbb{e}_2, \ldots, \mathbb{e}_{d_1})$ de $V_{(1)}$ e $(\mathbb{f}_1, \mathbb{f}_2, \ldots, \mathbb{f}_{d_2})$ de $V_{(2)}$. Uma aplicação linear $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V_{(1)}, V_{(2)})$ faz corresponder aos d_1 vectores da base de $V_{(1)}$ outros tantos vectores $(\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2, \ldots, \mathbb{x}_{d_1})$ de $V_{(2)}$ (que podem não ser mútuamente independentes) através da correspondência $\mathbb{x}_i = \mathbf{A}\,\mathbb{e}_i$.

Se $\mathbf{A}$ verifica a condição do Lema, vamos mostrar que o sub-espaço $S \subset V_{(2)}$, gerado pela $\mathbf{A}$ - imagem de $V_{(1)}$, tem de ser invariante para a representação $\mathbf{U}^{(2)}$ de G. De facto, se $\mathbb{x} \in S$, então

$$\mathbb{x} = x^i \mathbb{x}_i = x^i \mathbf{A}\,\mathbb{e}_i = \mathbf{A}\,(x^i \mathbb{e}_i) = \mathbf{A}\,\mathbb{v}$$

para algum $\mathbb{v} \in V_{(1)}$. Daí que, em S

$$\mathbf{U}^{(2)}\mathbb{x} = \mathbf{U}^{(2)}\mathbf{A}\,\mathbb{v} = \mathbf{A}\,\mathbf{U}^{(1)}\mathbb{v} = \mathbf{A}\,\mathbb{v}' = \mathbb{x}' \in S$$

Mas se a representação $\mathbf{U}^{(2)}$ é **IRREDUTÍVEL**, os únicos sub-espaços invariantes de $V_{(2)}$ são $S = \{0\}$ ou $S = V_{(2)}$. As alternativas são pois:

- $S = \{0\}$, o que só pode ser se $\mathbf{A} = 0$.
- $S = V_{(2)}$, e os vectores $\mathbb{x}_i = \mathbf{A}\,\mathbb{e}_i$, $i = (1, 2, \ldots, d_1)$, são linearmente independentes, o que implica necessáriamente que $d_1 = d_2$ e $det(\mathbf{A}) \neq 0$.
- $S = V_{(2)}$, e os vectores $\mathbb{x}_i = \mathbf{A}\,\mathbb{e}_i$, $i = (1, 2, \ldots, d_1)$, não são linearmente independentes, o que só aconteceria se $d_1 > d_2$. Mas nesse caso, a condição do Lema é também verificada para a $d_1 \times d_2$-matriz $\mathbf{A}^T \in \mathcal{L}(V_{(2)}, V_{(1)})$, i.e. para $\forall\, g \in G$

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{U}_g^{(2)} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\left(\mathbf{U}_{g^{-1}}^{(2)}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\mathbf{U}_{g^{-1}}^{(2)}\mathbf{A}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\mathbf{A}\,\mathbf{U}_{g^{-1}}^{(1)}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{U}_g^{(1)}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

O mesmo raciocínio que fizemos para **A** mostra que só se pode ter $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = 0$, já que se assumiu $d_2 < d_1$ e portanto os vectores $\mathbb{v}_j = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbb{f}_j$ não podem gerar $V_{(1)}$. Mas $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = 0$ implica $\mathbf{A} = 0$ e consequentemente $S = \{0\}$, uma contradição !

Portanto apenas as duas primeiras alíneas se verificam na prática, o que conclui o Lema I.■

[2º LEMA DE SCHUR]

LEMA [3.6]

Seja **U** uma representação **IRREDUTÍVEL**, de dimensão d, dum grupo G. Se existir uma $d\times d$-matriz **A** que verifique

$$\mathbf{U}_g\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{U}_g \qquad \forall\, g \in G$$

então $\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{I}_d$, onde $\mathbf{I}_d$ é a $d\times d$-matriz identidade e $\lambda \in \mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO

Definindo $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}_d$, então **B** encontra-se nas condições do **LEMA I**. Se escolhermos λ tal que $\mathrm{DET}(\mathbf{B}) = 0$ então $\mathbf{B} = 0$. Verifica-se portanto que existe um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbf{A} = \lambda\,\mathbf{I}_d$. Note que é crucial admitirmos aqui que a representação **U** é **COMPLEXA**, porque a equação secular $\mathrm{DET}(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}_d) = 0$ pode não ter solução se apenas admitirmos λ real.■

Como consequência imediata do **2º LEMA DE SCHUR** temos o

[GRUPOS ABELIANOS]

COROLÁRIO

Toda a representação irredutível de um grupo **ABELIANO** é unidimensional.