CAPÍTULO 4

REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS FINITOS E COMPACTOS

Conteúdo

4.1 CARACTERES DE GRUPOS ABELIANOS

[CARACTER LINEAR DUM GRUPO]

DEFINIÇÃO [4.1]

Dado G um grupo qualquer e $\mathbb{C}_* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ o conjunto de números complexos **NÃO-NULOS**, qualquer função $\chi : G \to \mathbb{C}_*$ que verifique

$$\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$$

para todos os $g, g' \in G$ designa-se um **CARACTER LINEAR** do grupo G.

[UNIDIMENSIONAL]– Um caracter linear é uma **REPRESENTAÇÃO UNIDIMENSIONAL** do grupo. Conversamente, os caracteres de **REPRESENTAÇÕES UNIDIMENSIONAIS** de grupos, e em particular **TODOS OS CARACTERES DE GRUPOS ABELIANOS** são lineares.

[FINITO]– Quando G é **FINITO**, para algum n e qualquer $g \in G$ tem-se $g^n = e$, pelo que os caracteres lineares devem verificar

$$\chi(g^n) = \chi(g)^n = 1 \quad \Longrightarrow \quad |\chi(g)| = 1 \quad \Longrightarrow \quad \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$$

[ABELIANO]– Quando $G = \langle a \rangle$ é **CÍCLICO** de ordem m, os caracteres possíveis são determinados pelo valor escolhido para $\chi(a) = \sqrt[m]{1} = \mathbb{e}^{2\pi\mathbb{i}\frac{k}{m}}$, ($k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$), e o grupo multiplicativo de todos os caracteres de G, i.e. o grupo **DUAL** $\hat{G}$, é o grupo gerado por estas m raízes (complexas) de 1: $\hat{G}$ é assim **ISOMORFO** a G.

[PRODUTO]– Dados dois caracteres lineares χ_1 e χ_2 de grupos G_1 e G_2, então podemos formar um caracter $\tilde{\chi}$ do produto directo $\tilde{G} = G_1 \times G_2$ através de

$$\tilde{\chi}(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$$

[ABELIANO]– No caso de G_1 e G_2 **ABELIANOS**, e dado que existem tantos caracteres $\tilde{\chi}$ quanto elementos de $\hat{\tilde{G}} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$, verifica-se o isomorfismo $\hat{\tilde{G}} \simeq \tilde{G}$. Um teorema geral afirma que qualquer grupo **FINITO ABELIANO** é produto directo de grupos **CÍCLICOS**, pelo que este resultado se generaliza a $\hat{G} \simeq G$ para qualquer grupo G nestas condições.

[ABELIANO]– O **BI-DUAL** $\hat{\hat{G}}$ dum grupo abeliano G é naturalmente isomorfo a este, $\hat{\hat{G}} \simeq G$, através da escolha de uma "base" de subgrupos cíclicos de G.

TEOREMA [4.2]

Os caracteres de um grupo **ABELIANO** G formam uma base **ORTOGONAL** do espaço vectorial $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(G)$ das funções de valor complexo em G.

DEMONSTRAÇÃO

Se χ_1 e χ_2 são dois caracteres diferentes de G, então $\chi_1(g')\overline{\chi_2(g')} = \dfrac{\chi_1(g')}{\chi_2(g')} \neq 1$ para algum $g' \in G$, pelo que

$$\sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \sum_{g\in G} \chi_1(g'g)\overline{\chi_2(g'g)} = \chi_1(g')\overline{\chi_2(g')} \sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}$$

$$\left(1 - \chi_1(g')\overline{\chi_2(g')}\right) \sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = 0$$

donde se conclui que

$$\left\langle \chi_2, \chi_1 \right\rangle = \frac{1}{o[G]} \sum_{g\in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = 0$$

Pelo mesmo argumento se mostra que, para qualquer caracter não trivial $\chi \neq 1$ de G,

$$\sum_{g\in G} \chi(g) = 0$$

■

[OPERADORES DE PROJECÇÃO]

DEFINIÇÃO [4.3]

Dada uma representação **R** : $G \to V_{\mathbb{C}}$ dum grupo abeliano finito num espaço vectorial complexo $V_{\mathbb{C}}$, a cada caracter χ_i corresponde um operador

$$\mathbf{P}_\chi = \frac{1}{o[G]} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)}\, \mathbf{R}_g$$

designado **OPERADOR DE PROJECÇÃO** porque verifica as condições:

III.3 - i . $\mathbf{P}_\chi^2 = \mathbf{P}_\chi$ para $\forall\, \chi \in \hat{G}$.

III.3 - ii . $\mathbf{P}_{\chi_1}\mathbf{P}_{\chi_2} = \mathbf{P}_{\chi_2}\mathbf{P}_{\chi_1} = 0$ sempre que $\chi_1 \neq \chi_2$

III.3 - iii . $\sum_{\chi \in \hat{G}} \mathbf{P}_\chi = \mathbf{I}$

III.3 - iv . $\mathbf{R}_g\mathbf{P}_\chi = \chi(g)\, \mathbf{P}_\chi$ para qualquer $g \in G, \chi \in \hat{G}$

– De (III.3 - iv) podemos concluir que, para qualquer $\psi \in V_{\mathbb{C}}$, $\psi_\chi = \mathbf{P}_\chi\psi$ é um vector próprio da representação, $\mathbf{R}_g\psi_\chi = \chi(g)\psi_\chi$. Os sub-espaços $\mathbf{P}_\chi V_{\mathbb{C}}$ são assim invariantes para a representação **R**, e $V_{\mathbb{C}}$ é uma soma directa destes sub-espaços quando $\chi \in \hat{G}$.

– De (III.3 - iii) segue-se que podemos escrever qualquer $\psi \in V_{\mathbb{C}}$ como $\psi = \sum_{\chi \in \hat{G}} \psi_\chi$.

– Esta decomposição de **R** em componentes irredutíveis agindo em sub-espaços disjuntos $\mathbf{P}_\chi V_{\mathbb{C}}$ designa-se **DECOMPOSIÇÃO CENTRAL** ou **DECOMPOSIÇÃO CANÓNICA** em "primários" disjuntos.

4.2 CARACTERES DE GRUPOS NÃO-ABELIANOS

Para grupos finitos não-abelianos é possivel generalizar a noção de caracter e o seu papel na decomposição de representações, mas a determinação de $\hat{G}$ é bastante mais complexa.

[CARACTER DUMA REPRESENTAÇÃO DUM GRUPO]

DEFINIÇÃO [4.4]

Dada uma representação **R** de um grupo G, o **TRAÇO** da matrizes $\mathbf{R}_g$ da representação determinam uma função sobre G

$$\begin{aligned} \chi : G &\to \mathrm{AUT}(V) \\ g &\mapsto \chi(g) = \mathrm{TR}\left[\mathbf{R}_g\right] \end{aligned}$$

designada o **CARACTER DA REPRESENTAÇÃO R**.

– O caracter duma representação unidimensional é **LINEAR**.

– O caracter de uma representação irredutível designa-se **SIMPLES**.

– O caracter de uma representação redutível chama-se **COMPOSTO**.

TEOREMA [4.5]

Duas representações equivalentes $\mathbf{R}$ e $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{S}\,\mathbf{R}\,\mathbf{S}^{-1}$ têm o mesmo caracter, i.e. $\chi(g) = \tilde{\chi}(g)$.

Isto porque $\mathrm{TR}\,[\mathbf{A}\,\mathbf{B}] = \mathrm{TR}\,[\mathbf{B}\,\mathbf{A}]$ em geral, pelo que

$$\chi(g) = \mathrm{TR}\left[\mathbf{R}_g\right] = \mathrm{TR}\left[\mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{R}}_g\mathbf{S}^{-1}\right] = \mathrm{TR}\left[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}\,\tilde{\mathbf{R}}_g\right] = \mathrm{TR}\left[\,\tilde{\mathbf{R}}_g\right] = \chi(\tilde{g})$$

TEOREMA [4.6]

O caracter χ de uma representação de G é uma **FUNÇÃO DE CLASSE** $\chi(C_\alpha)$ em G, i.e. é constante sobre cada classe de conjugação C_α de G.

Se g e g' pertencem à mesma classe C_α, então existe $\tilde{g} \in G$ tal que $g' = \tilde{g}\,g\,\tilde{g}^{-1}$. Pelos mesmos argumentos que anteriormente,

$$\chi(g') = \mathrm{TR}\left[\mathbf{R}_{g'}\right] = \mathrm{TR}\left[\mathbf{R}_{\tilde{g}}\mathbf{R}_g\mathbf{R}^{-1}_{\tilde{g}}\right] = \mathrm{TR}\left[\mathbf{R}^{-1}_{\tilde{g}}\mathbf{R}_{\tilde{g}}\mathbf{R}_g\right] = \mathrm{TR}\left[\mathbf{R}_g\right] = \chi(g)$$

TEOREMA [4.7]

Se G é um grupo **AMBIVALENTE** de dimensão finita (ou de Lie compacto), então o caracter χ duma representação qualquer de G é **REAL**, i.e.

$$\bar{\chi}(g) = \chi(g) \in \mathbb{R}, \quad \forall\, g \in G$$

Dado que qualquer representação $\mathbf{R}$ dum grupo finito ou compacto é equivalente a uma unitária $\mathbf{U}$, e que qualquer matriz unitária verifica $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\dagger}$ então, como $\mathrm{TR}\left[\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right] = \mathrm{TR}\,[\mathbf{A}]$, tem-se

$$\chi(g^{-1}) = \mathrm{TR}\left[\mathbf{U}_g^{-1}\right] = \mathrm{TR}\left[\mathbf{U}_g^{\dagger}\right] = \overline{\chi(g)}$$

Num grupo ambivalente, cada classe verifica $C_\alpha \equiv C_\alpha^{-1}$, pelo que $\chi(C_\alpha) = \chi(C_\alpha^{-1}) = \overline{\chi(C_\alpha)}$.

EXEMPLO: O grupo diédrico $D_n = \langle a, b\rangle$ com $a^2 = b^n = e$, $bab = a$ é ambivalente finito, donde todos os seus caracteres são reais. De facto

$$\begin{array}{lcl}
a^{-1} = a = e^{-1}a\,e & \Longrightarrow & a^{-1}\mathcal{R}\ a \\
b^{-1} = a\,b\,a = a^{-1}b\,a & \Longrightarrow & b^{-1}\mathcal{R}\ b \\
b^{-m} = (a^{-1}b\,a)^m = a^{-1}b^m\,a & \Longrightarrow & b^{-m}\mathcal{R}\ b^m \\
(ab^m)^{-1} = b^{-m}a^{-1} = e^{-1}ab^m e & \Longrightarrow & (ab^m)^{-1}\mathcal{R}\,ab^m
\end{array}$$

4.3 RELAÇÕES DE ORTOGONALIDADE

Defina-se em $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(G)$ um produto escalar

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)}\, \psi(g)$$

onde $N = \#G$ designa o número de elementos de G. No caso de grupos infinitos, onde a noção de **MEDIDA INVARIANTE** μ existe (G grupo topológico, localmente compacto) e a medida do grupo $\Omega = \mu(G)$ é finita (G compacto), pode-se ainda definir um produto escalar idêntico

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_G \overline{\phi(g)}\, \psi(g)\, d\mu(g)$$

[SISTEMA ORTOGONAL COMPLETO DE FUNÇÕES SOBRE G]

LEMA [4.8]

As entradas $u_{ij}^{(k)}(g)$ das matrizes $\mathbf{U}_g^{(k)}$ associadas a representações **IRREDUTÍVEIS** de dimensão d_k de G são funções de $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(G)$ **MÚTUAMENTE ORTOGONAIS**, i.e.

$$\left\langle u_{ij}^{(k_1)}, u_{rs}^{(k_2)} \right\rangle = \frac{1}{d_{k_1}} \delta_{ir} \delta_{js} \delta^{k_1 k_2}$$

Usando uma matriz **ARBITRÁRIA** $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(V_{(k_1)}, V_{(k_2)})$ constrói-se

$$\mathbf{T} = \sum_{g \in G} \mathbf{U}_{g^{-1}}^{(k_2)} \mathbf{B}\, \mathbf{U}_g^{(k_1)}$$

Mas então, se $\mathbf{U}^{(k_1)}$ e $\mathbf{U}^{(k_2)}$ forem representações **IRREDUTÍVEIS INEQUIVALENTES**,

$$\mathbf{T}\,\mathbf{U}_{g'}^{(k_1)} = \mathbf{U}_{g'}^{(k_2)}\,\mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \text{(Lema de Schur I)}$$

Dado que $\mathbf{B}$ é completamente arbitrário,

$$t_{rj} = \sum_{g \in G} u_{rs}^{(k_2)}(g^{-1}) u_{ij}^{(k_1)}(g)\, b^{si} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{g \in G} \overline{u_{sr}^{(k_2)}(g)}\, u_{ij}^{(k_1)}(g) = 0$$

ou seja

(4-1) $$\left\langle u_{rs}^{(k_2)}, u_{ij}^{(k_1)} \right\rangle = 0 \quad se \quad \mathbf{U}^{(k_1)} \not\approx \mathbf{U}^{(k_2)}$$

Por outro lado, se $\mathbf{U}^{(k_1)} = \mathbf{U}^{(k_2)}$, $(k_1 = k_2 = k)$ e o outro Lema de Schur aplicado a

$$\mathbf{T}\,\mathbf{U}_{g'}^{(k)} = \mathbf{U}_{g'}^{(k)}\,\mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} = \lambda\, \mathbf{1} \quad \text{(Lema de Schur II)}$$

onde $\lambda d_k = N\ \mathrm{TR}\,[\mathbf{B}]$. Então, de $\mathbf{T} - \frac{N}{d_k}\mathrm{TR}\,[\mathbf{B}]\,\mathbf{1} = 0$ obtém-se

$$t_{rj} - \frac{N}{d_k}\mathrm{TR}\,[\mathbf{B}]\,\delta_{rj} = \left(\sum_{g \in G} u_{rs}^{(k)}(g^{-1})\, u_{ij}^{(k)}(g) - \frac{N}{d_{k_1}} \delta_{si}\delta_{rj} \right) b^{si} = 0$$

ou seja

$$\sum_{g \in G} \overline{u_{sr}^{(k)}(g)}\, u_{ij}^{(k)}(g) = \frac{N}{d_{k_1}} \delta_{si}\delta_{rj}$$

ou

(4-2) $$\left\langle u_{sr}^{(k)}, u_{ij}^{(k)} \right\rangle = \frac{1}{d_k} \delta_{is}\delta_{jr}$$

Em suma, podemos escrever simultâneamente **(4-2)** e **(4-1)** como $\left\langle u_{sr}^{(k_2)}, u_{ij}^{(k_1)} \right\rangle = \frac{1}{d_{k_1}} \delta_{si}\, \delta_{rj}\, \delta^{k_1 k_2}$. ■

TEOREMA [4.9]

Sejam $\chi^{(1)},\ \chi^{(2)}, \ldots \chi^{(p)}$ os caracteres de todas as representações irredutíveis de G. Estes caracteres obedecem às relações de ortogonalidade

$$\left\langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \bar{\chi}^{(i)}(g)\, \chi^{(j)}(g) = \delta^{ij}$$

DEMONSTRAÇÃO

Para a demonstração vamos usar a expressão anterior e, contraindo nos índices apropriados

$$\delta^{ij}\delta^{rs} \left\langle u^{(k_2)}_{sr}, u^{(k_1)}_{ij} \right\rangle = \left(\frac{1}{d_{k_1}} \delta^{ij}\delta_{si}\delta_{rj}\delta^{rs} \right) \delta^{k_1 k_2} \quad \Longrightarrow \quad \left\langle u^{(k_2)}{}_s{}^s, u^{(k_1)}{}_i{}^i \right\rangle = \left(\frac{1}{d_{k_1}} \delta^s_s \right) \delta^{k_1 k_2}$$

obtemos a desejada ortogonalidade entre caracteres $\left\langle \chi^{(k_2)}, \chi^{(k_1)} \right\rangle = \delta^{k_1 k_2}$. ■

– Como $\chi^{(i)}(x) = \chi^{(i)}(y)$ se $x, y \in C_\alpha$, e designando por $c_\alpha = \#C_\alpha$, teremos $N = \#G = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha$ e as relações de ortogonalidade escrevem-se também

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha \bar{\chi}^{(i)}(C_\alpha)\, \chi^{(j)}(C_\alpha) = \delta^{ij}$$

– Estas relações podem ser vistas como condições de ortonormalidade para um sistema de p vectores $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$, num espaço vectorial de dimensão n onde

$$\boldsymbol{\xi}^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sqrt{c_1}\ \chi^{(i)}(C_1) \\ \sqrt{c_2}\ \chi^{(i)}(C_2) \\ \vdots \\ \sqrt{c_n}\ \chi^{(i)}(C_n) \end{pmatrix}$$

Não podendo haver mais vectores ortogonais (o que implica linearmente independentes) do que a dimensão do espaço em que se definem, imediatamente vemos que $p \leq n$, ou seja

$$\begin{bmatrix} \text{o número } p \text{ de representações} \\ \text{irredutíveis inequivalentes de } G \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \text{o número } n \text{ de classes de} \\ \text{conjugação distintas de } G \end{bmatrix}$$

De facto, iremos provar que estes dois números são iguais!

4.4 REPRESENTAÇÃO REGULAR

Dado um grupo G existe sempre pelo menos uma representação, denominada **REPRESENTAÇÃO REGULAR** de G, que é uma representação $\mathbf{R} : G \to \mathrm{AUT}\left(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)\right)$ no espaço vectorial das funções de G num corpo $\mathbb{K}$, e é definida da seguinte forma: a cada elemento $g \in G$ faz-se corresponder o operador linear

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_g : \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G) &\to \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G) \\ \phi \ &\mapsto \ \mathbf{R}_g\phi : G \to \mathbb{K} \\ &\qquad g' \ \mapsto (\mathbf{R}_g\phi)(g') = \phi(g'g) \end{aligned}$$

Para verificar que **R** é uma representação, basta observar que, quaisquer que sejam $\phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ e $g, g', g'' \in G$, se tem

$$(\mathbf{R}_g(\mathbf{R}_{g'}\phi))(g'') = (\mathbf{R}_{g'}\phi)(g''g) = \phi(g''gg') = (\mathbf{R}_{gg'}\phi)(g'')$$

i.e., como ϕ é arbitrário,

$$\mathbf{R}_g \circ \mathbf{R}_{g'} = \mathbf{R}_{gg'}$$

No caso de **GRUPOS FINITOS** podemos ir mais longe e explicitar esta representação em forma de matrizes $N \times N$. Basta fazer notar que, num grupo com N elementos $\{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$, existe uma base natural para o espaço $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ e que consiste nas funções

$$\varphi_j(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = g_j \\ 0 & \text{se } g \neq g_j \end{cases}$$

Podemos então explicitar **R** pela sua acção nos vectores desta base

$$\mathbf{R}_g\varphi_j = r_j^k(g)\varphi_k \quad \text{onde} \quad r_j^k(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g_j g = g_k \\ 0 & \text{se } g_j g \neq g_k \end{cases}$$

Como é imediatamente aparente $\mathbf{R}_g$ é uma matriz com um só 1 em cada linha e coluna porque

$$\begin{aligned} g_j g = g_k = g_{k'} \quad &\Rightarrow \quad k = k' \\ g_j g = g_{j'} g = g_k \quad &\Rightarrow \quad j = j' \end{aligned}$$

Como para qualquer $g_i \in G$, $g_i g = g_i$ se e só se $g = e$, o resultado anterior permite concluir que o caracter da representação regular é

(4-3)
$$\chi^{\mathbf{R}}(g) = \begin{cases} N & \text{se } g = e \\ 0 & \text{se } g \neq e \end{cases}$$

Como todas as representações de dimensão finita de grupos finitos ou compactos, a representação regular **R** é **COMPLETAMENTE REDUTÍVEL**, i.e. é possível encontrar uma matriz **A** tal que a representação equivalente $\tilde{\mathbf{R}}_g = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}_g\mathbf{A}$ seja da forma

(4-4)
$$\tilde{\mathbf{R}}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_g^{(i_1)} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(i_2)} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{U}_g^{(i_{r-1})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(i_r)} \end{pmatrix}$$

onde os $\mathbf{U}^{(i_k)}$ são representações irredutíveis (não necessáriamente distintas). Se designarmos por $m^{(s)}$ o número de vezes que uma dada representação irredutível $\mathbf{U}^{(s)}$ aparece na representação $\tilde{\mathbf{R}}$ (i.e. a sua **MULTIPLICIDADE**) podemos ver que

(4-5)
$$\chi^{\mathbf{R}}(g) = \mathrm{TR}\left[\tilde{\mathbf{R}}_g\right] = \sum_{s=1}^{p} m^{(s)} \chi_g^{(s)}$$

portanto

$$\left\langle \chi^{(s')}, \chi^{\mathbf{R}} \right\rangle = \sum_{s=1}^{p} m^{(s)} \left\langle \chi_g^{(s')}, \chi_g^{(s)} \right\rangle = \sum_{s=1}^{p} m^{(s)} \delta^{ss'} = m^{(s')}$$

mas por outro lado, relembrando que $\chi^{(s)}(e) = d_s$ (a dimensão da representação) e **(4-3)**, temos

$$\left\langle \chi^{(s')}, \chi^{\mathbf{R}} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \overline{\chi}_g^{(s')} \chi_g^{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \overline{\chi}_e^{(s')} \chi_e^{\mathbf{R}} = d_{s'}$$

donde somos forçados a reconhecer que $m^{(s')} = d_{s'}$. Mas então **(4-5)** será, para $g = e$

$$\chi_e^{\mathbf{R}} = N = \sum_{s=1}^{p} m^{(s)} \chi_e^{(s)} = \sum_{s=1}^{p} {d_s}^2$$

Acabámos de demonstrar o

[TEOREMA DE BURNSIDE]

TEOREMA [4.10]

Cada representação irredutível $\mathbf{U}^{(s)}$ aparece na representação regular $\mathbf{R}$ com uma multiplicidade $m^{(s)}$ igual á sua dimensão d_s e a soma dos quadrados de todas as representações irredutíveis inequivalentes de G iguala a ordem do grupo

$${d_1}^2 + {d_2}^2 + \ldots + {d_p}^2 = N$$

Significa isso que o espaço de funções $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ se decompõe em soma directa de sub-espaços $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}^{(i_k)}(G)$ que são invariantes para a representação regular $\tilde{\mathbf{R}}$ e que suportam a sua representação irredutível $\mathbf{U}^{(i_k)}$, i.e. $\forall\ \phi^{(i_k)} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}^{(i_k)}(G)$,

$$\tilde{\mathbf{R}}_g \phi^{(i_k)} = \mathbf{U}_g^{(i_k)} \phi^{(i_k)} \quad \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}^{(i_k)}(G)$$

Podemos portanto escrever, $\forall\ \phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$

(4-6)
$$\phi = \sum_{k=1}^{r} \phi^{(i_k)}$$

de tal forma que

(4-7)
$$\phi(g) = (\tilde{\mathbf{R}}_g \phi)(e) = \sum_{k=1}^{r} (\mathbf{U}_g^{(i_k)} \phi^{(i_k)})(e)$$

Por outro lado, ao mudar para a representação equivalente $\tilde{\mathbf{R}}$ mudamos para uma base de $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ que é

$$\tilde{\varphi}_j = \mathbf{A}\, \varphi_j = a^i_j\, \varphi_i \quad ; \qquad (i, j = 1, \ldots, N)$$

na qual qualquer elemento de $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ se pode decompôr

$$\phi = \tilde{f}^j\ \tilde{\varphi}_j$$

Nesta base, a expressão da representação $\tilde{\mathbf{R}}$ é

$$\phi(g) = (\tilde{\mathbf{R}}_g\phi)(e) = \tilde{r}_i^{\ j}(g)\tilde{f}^i\ \tilde{\varphi}_j(e) = c^i_j\ \tilde{r}_i^{\ j}(g)$$

onde $c^i_j = \tilde{f}^i\ \tilde{\varphi}_j(e)$. Mas os únicos elementos $\tilde{r}_i^{\ j}$ não-nulos são, por **(4-4)**, as entradas das representações irredutíveis $\mathbf{U}^{(i_k)}$. Tendo em conta **(4-6)** e **(4-7)**, e usando para cada i_k a decomposição $\phi^{(i_k)} = \tilde{f}^{(i_k)a}\,\tilde{\varphi}_a^{(i_k)}$, podemos ainda escrever

$$\phi(g) = \sum_{k=1}^{r} u_a^{(i_k)b}(g)\ \tilde{f}^{(i_k)a}\ \ \tilde{\varphi}_b^{(i_k)}(e) = \sum_{k=1}^{r} C_b^{(i_k)a} u_a^{(i_k)b}(g)$$

onde $C_b^{(i_k)a} = \tilde{f}^{(i_k)a}\ \ \tilde{\varphi}_b^{(i_k)}(e)$. Resumindo:

[SISTEMA ORTOGONAL COMPLETO DE FUNÇÕES SOBRE G]

TEOREMA 4.11

O conjunto de funções constituído pelos elementos matriciais $u_a^{(s)b}$ das representações irredutíveis inequivalentes $\mathbf{U}^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$ de G é um **CONJUNTO COMPLETO** no espaço das funções sobre G, i.e. $\forall\ \phi \in\ \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$,

$$\phi(g) = \sum_{s=1}^{p} C_i^{(s)j} u_i^{(s)j}(g)$$

EXEMPLO

O grupo S_3 tem três classes de conjugação:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{e\} & &\rightsquigarrow h_1 = 1 \\ C_2 &= \{(12),\ (13),\ (23)\} & &\rightsquigarrow h_2 = 3 \\ C_3 &= \{(123),\ (132)\} & &\rightsquigarrow h_3 = 2 \end{aligned}$$

Pelo teorema de Burnside, se d_i for a dimensão da i-ésima representação irredutível, deve haver tantas quanto o número de classes de conjugação (= 3) e então

$${d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2 = \#S_3 = 3! = 6$$

A única solução é $d_1 = d_2 = 1$ e $d_3 = 2$. Das relações de ortogonalidade entre os caracteres, podemos reconstruir a tabela de caracteres

$\mathcal{S}_3$	$C_1^{(1)}$	$C_2^{(3)}$	$C_3^{(2)}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	0	-1

[2^{A} RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE]

TEOREMA [4.12]

Dado um grupo G de ordem N, com classes de conjugação C_α, os caracteres $\chi^{(i)}$, $i = 1, 2 \ldots p$ de todas as representações irredutíveis de G verificam

$$\frac{c_\alpha}{N} \sum_{i=1}^{p} \overline{\chi}^{(i)}(C_\alpha)\, \chi^{(i)}(C_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

onde $c_\alpha = \# C_\alpha$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $\mathbf{U}^{(i)}$ for uma das representações irredutíveis de dimensão d_i de G, defina-se a matriz

$$\mathbf{S}_\alpha^{(i)} \equiv \sum_{x \in C_\alpha} \mathbf{U}_x^{(i)}$$

então vê-se que $\forall\, y \in G$

$$\mathbf{S}_\alpha^{(i)} \mathbf{U}_y^{(i)} = \mathbf{U}_y^{(i)} \mathbf{S}_\alpha^{(i)} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{S}_\alpha^{(i)} = \lambda\, \mathbf{1}$$

pelo lema de Schur e a irredutibilidade de $\mathrm{U}^{(i)}$. Tomando o traço da expressão anterior

$$\mathrm{TR}\left[\mathbf{S}_\alpha^{(i)}\right] = \lambda\, d_i = \sum_{x \in C_\alpha} \chi^{(i)}(x) = c_\alpha \chi^{(i)}(C_\alpha)$$

donde $\lambda = \frac{c_\alpha}{d_i}\chi^{(i)}(C_\alpha)$ e

$$\mathbf{S}_\alpha^{(i)} = \frac{c_\alpha}{d_i}\chi^{(i)}(C_\alpha)\, \mathbf{1}$$

Mas então

$$\mathbf{S}_\alpha^{(i)} \mathbf{S}_\beta^{(i)} = \frac{c_\alpha}{d_i}\frac{c_\beta}{d_i}\, \chi^{(i)}(C_\alpha)\, \chi^{(i)}(C_\beta) \mathbf{1} =$$

$$= \sum_{x \in C_\alpha} \mathbf{U}_x^{(i)} \sum_{y \in C_\beta} \mathbf{U}_y^{(i)} = \sum_{z \in C_\alpha C_\beta} \mathbf{U}_z^{(i)} =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{n} h_{\alpha\beta}{}^{\gamma}\, \mathbf{S}_\gamma^{(i)} = \sum_{\gamma=1}^{n} h_{\alpha\beta}{}^{\gamma} \frac{c_\gamma}{d_i}\chi^{(i)}(C_\gamma)\, \mathbf{1}$$

onde usámos $C_\alpha C_\beta = \sum_{\gamma=1}^{n} h_{\alpha\beta}{}^{\gamma} C_\gamma$. Daqui se obtém a seguinte relação

$$\sum_{\gamma=1}^{n} h_{\alpha\beta}{}^{\gamma} c_\gamma \chi^{(i)}(C_\gamma) = \frac{1}{d_i} c_\alpha c_\beta \chi^{(i)}(C_\alpha)\chi^{(i)}(C_\beta)$$

pelo que, somando em i

$$\sum_{\gamma=1}^{n} h_{\alpha\beta}{}^{\gamma} c_\gamma \sum_{i=1}^{p} d_i \chi^{(i)}(C_\gamma) = c_\alpha c_\beta \sum_{i=1}^{p} \chi^{(i)}(C_\alpha)\chi^{(i)}(C_\beta)$$

Recordemos que, para a representação regular,

$$\sum_{i=1}^{p} d_i \, \chi^{(i)}(x) = \chi^{\mathbf{R}}(x) = \begin{cases} N, & se\ x = e \\ 0, & se\ x \neq e \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \chi^{\mathbf{R}}(C_\alpha) = N\delta_{\alpha 1}$$

pelo que a expressão anterior se simplifica para

$$\sum_{\gamma=1}^{n} h_{\alpha\beta}{}^{\gamma} c_\gamma N \, \delta_{\gamma 1} = c_\alpha c_\beta \sum_{i=1}^{p} \chi^{(i)}(C_\alpha)\chi^{(i)}(C_\beta) = N \, h_{\alpha\beta}{}^{1}$$

Contudo, como mostrámos em (2-3)

$$h_{\alpha\beta}{}^{1} = \begin{cases} c_\alpha, & se\ C_\beta = C_\alpha^{-1} \\ 0\ , & se\ C_\beta \neq C_\alpha^{-1} \end{cases} \qquad e \qquad \chi^{(i)}(C_\alpha^{-1}) = \overline{\chi}^{(i)}(C_\alpha)$$

pelo que se obtém a relação de ortogonalidade desejada. ■

[CLASSES E REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS]

TEOREMA 4.13

O número p de representações **IRREDUTÍVEIS INEQUIVALENTES** $\mathbf{U}^{(i)}$ de G é **IGUAL** ao número n de **CLASSES DE CONJUGAÇÃO** C_α distintas de G.

DEMONSTRAÇÃO

Da **1ª RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE** com $i = j$ resulta, somando para todas as representações irredutíveis inequivalentes de G

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_\alpha}{N} \, \overline{\chi}^{(i)}(C_\alpha)\chi^{(i)}(C_\alpha) = p$$

Da mesma forma, da **2ª RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE** com $\alpha = \beta$ resulta, somando para todas as classes de conjugação

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \frac{c_\alpha}{N} \, \overline{\chi}^{(i)}(C_\alpha)\chi^{(i)}(C_\alpha) = n$$

Mas estas duas expressões são iguais por troca da ordem de soma, e por isso se conclui que $p = n$. ■

As relações de ortogonalidade entre caracteres permitem mostrar que

TEOREMA 4.14

Duas representações $\mathbf{U}$ e $\tilde{\mathbf{U}}$ de G são **EQUIVALENTES SSE** tiverem o mesmo caracter, i.e.

$$\chi = \tilde{\chi} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{U} \simeq \tilde{\mathbf{U}}$$

DEMONSTRAÇÃO

Se **U** e $\tilde{\mathbf{U}}$ forem redutíveis, então são completamente redutíveis e

$$\mathbf{U} \simeq \begin{pmatrix} \mathbf{U}_g^{(i_1)} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(i_2)} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{U}_g^{(i_{r-1})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(i_r)} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{U}} \simeq \begin{pmatrix} \mathbf{U}_g^{(j_1)} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(j_2)} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{U}_g^{(j_{s-1})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(j_s)} \end{pmatrix}$$

onde os $\mathbf{U}^{(i)}$ são irredutíveis que aparecem em **U** com multiplicidade $m^{(i)}$ e em $\tilde{\mathbf{U}}$ com multiplicidade $\tilde{m}^{(i)}$. (Uma representação irredutível $\mathbf{U}^{(j)}$ que não apareça em **U** tem multiplicidade $m^{(j)} = 0$).

Se os caracteres de **U** e $\tilde{\mathbf{U}}$ são iguais

$$\chi - \tilde{\chi} = 0 = \mathrm{TR}\,[\mathbf{U}] - \mathrm{TR}\left[\tilde{\mathbf{U}}\right] \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p}\left(m^{(i)} - \tilde{m}^{(i)}\right)\chi^{(i)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m^{(i)} = \tilde{m}^{(i)}$$

pela ortogonalidade dos caracteres das irredutíveis $\chi^{(i)}$. Isto significa pois que **U** e $\tilde{\mathbf{U}}$ são equivalentes à mesma representação onde $\mathbf{U}^{(i)}$ aparece com multiplicidade $m^{(i)} = \tilde{m}^{(i)}$. ■

Como consequência ainda da ortogonalidade podemos escrever a **NORMA DO CARACTER** de qualquer representação **U** de G como sendo $\|\chi\|^2 = (\chi, \chi) = \sum_{i=1}^{p} m^{(i)2}$, pelo que mostrámos o

TEOREMA 4.15

Uma representação do grupo G é **IRREDUTÍVEL SSE** o seu caracter verificar $\|\chi\|^2 = 1$.

REPRESENTAÇÃO IRREDUTÍVEL DE $\mathcal{S}_3$

Procuramos determinar a representação irredutível de dimensão 2 de $\mathcal{S}_3$, o menor grupo não abeliano, a qual corresponde ao caracter

$$\chi_3(e) = \chi_3(C_1) = 2 \quad ; \qquad \chi_3(C_2) = -1 \quad ; \qquad \chi_3(C_3) = 0$$

É evidente que basta determinar as representações matriciais dos geradores do grupo, neste caso as transposições $\sigma_1 = (12)(3)$, $\sigma_2 = (1)(23)$ e $\sigma_3 = (13)(2)$. Procurando representações unitárias, podemos escolher

$$\mathbf{U}_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

diagonal (porque qualquer matriz unitária é diagonalizável) embora $\mathbf{U}_{\sigma_2}$ e $\mathbf{U}_{\sigma_3}$ não possam ser também diagonais. Como $\sigma_1 \in C_3$ deve-se ter

(4-8) $$\chi(\sigma_1) = \mathrm{TR}[\mathbf{U}_{\sigma_1}] = a + b = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad b = -a$$

Unitaridade exige que $|a|^2 = 1$, e $\sigma_1^2 = e$ significa $\mathbf{U}_{\sigma_1}^2 = \mathbf{Id}$ ou seja $a^2 = 1$, donde $a = \pm 1$ são possíveis, mas as matrizes resultantes são equivalentes. Assim escolhemos

$$\mathbf{U}_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A seguir, dado que $\sigma_2 \in C_3$, procuramos encontrar outra matriz de traço nulo

$$\mathbf{U}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Unitaridade requer que

$$\mathbf{U}_{\sigma_2}^{\dagger}\mathbf{U}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \alpha\,\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} & -\beta\,\overline{\alpha} + \alpha\,\overline{\gamma} \\ \gamma\,\overline{\alpha} - \alpha\overline{\beta} & \alpha\,\overline{\alpha} + \gamma\,\overline{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{Id}$$

donde se deduz

(4-9) $$|\beta|^2 = |\gamma|^2 = 1 - |\alpha|^2 \quad ; \qquad \beta = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}\,\overline{\gamma}$$

Por outro lado $\sigma_2^2 = e \in C_1$ significa que

$$\mathbf{U}_{\sigma_2}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta\gamma \end{pmatrix} = \mathbf{Id}$$

o que pronuncia, usando **(4-9)**

(4-10) $$\beta\,\gamma = 1 - \alpha^2 = \frac{\alpha}{\overline{\alpha}}(1 - |\alpha|^2) \quad \Longrightarrow \quad \overline{\alpha} = \alpha \;; \quad \beta = \overline{\gamma}$$

(portanto α é real).

Agora $\sigma_1\sigma_2 \in C_2$ e $\chi(C_2) = -1$ donde, usando **(4-10)** e **(4-9)**,

(4-11) $$\mathrm{TR}[\mathbf{U}_{\sigma_1\sigma_2}] = \mathrm{TR}\left[\begin{pmatrix} \alpha & \overline{\gamma} \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}\right] = 2\alpha = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = -\frac{1}{2} \;; \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \;; \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\theta}$$

Portanto

$$\mathbf{U}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\theta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e de $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$

$$\mathbf{U}_{\sigma_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\theta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Os restantes elementos são $\sigma_4 = \sigma_1\sigma_2$ e $\sigma_5 = \sigma_1\sigma_3$ donde

$$\mathbf{U}_{\sigma_4} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\,e^{-i\theta} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{U}_{\sigma_5} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{i\theta} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\theta} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

O parâmetro θ é arbitrário, e a escolha de $\theta = 0$ dá uma representação equivalente. É um facto que qualquer representação irredutível de $\mathcal{S}_n$ pode ser escolhida real.

[TEOREMA DE NEUMAN-PETER-WEYL]

TEOREMA [4.16]

Se $f(g)$ é uma função sobre um grupo compacto G tal que $\|f\|_G^2 = \int_G |f(g)|^2 d\mu(g) < \infty$, então f pode ser expandida (no sentido da convergência forte em espaços de Hilbert) em termos das representações irredutíveis $\mathbf{U}^{(p)}$ de G como

$$f(g) = \sum_{p \in Irr} \sum_{i,j=1}^{d_p} \hat{f}_i^j(p)\, u_j^{(p)i}(g)$$

onde os $\hat{f}_i^j(p)$ são constantes.

Grupo $\mathrm{U}(1) \simeq \mathrm{S}^1$**–** O grupo formado por transformações g_θ dependentes de um parâmetro $\theta \in [0, 2\pi]$ e tal que $g_\theta g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}$, $g_{\theta+2\pi} = g_\theta$ é abeliano e tem representações irredutíveis unidimensionais inequivalentes $\mathbf{U}^{(p)}{}_{g_\theta} = e^{i\,p\,\theta}$ com $p \in \mathbb{Z}$, i.e. $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. A medida de Haar em S^1 é $d\mu(g_\theta) = d\theta$ e o grupo é compacto, donde o seu volume $\Omega = \int_{S^1} d\mu(g_\theta) = 2\pi$. As relações de ortogonalidade tomam a forma

$$\Omega\, \delta_{pq} = \int_{S^1} \mathbf{U}^{(p)}_{g_\theta}\, \mathbf{U}^{(q)}_{g_\theta^{-1}} d\mu(g_\theta) = \int_0^{2\pi} e^{i\,p\,\theta} e^{-i\,q\,\theta} d\theta = 2\pi\, \delta_{pq}$$

No caso de $G = S^1$, o teorema de Peter-Weyl é a decomposição em série de Fourier de uma função periódica

$$f(\theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}_p\, e^{ip\theta}$$

Grupo T^1**–** Para alguns grupos não compactos o teorema de Peter-Weyl pode funcionar às vezes, mas as relações de ortogonalidade têem que ser generalizadas. Por exemplo, para $G = \mathrm{T}^1 \simeq \mathbb{R}_+$ as representações irredutíveis são $\mathbf{U}_x^{(\lambda)} = e^{i\lambda x}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, e qualquer função de quadrado somável na recta $\mathbb{R}$ pode expandir-se como uma transformada de Fourier

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

As relações de ortogonalidade são agora expressas em termos das funções-δ de Dirac como

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{U}_x^{(\lambda)} \overline{\mathbf{U}_x^{(\lambda')}} dx = 2\pi\,\delta(\lambda - \lambda')$$

Grupo $SO(3,\mathbb{R})$**–** No caso do grupo de rotações de $\mathbb{R}^3$, $G = SO(3,\mathbb{R})$, cada rotação pode ser parametrizada por um eixo de rotação $\mathbb{n}(\theta,\phi)$ e um ângulo de rotação φ em torno de $\mathbb{n}$, i.e. um ponto da esfera de raio π centrada na origem. Pontos antipodais da superfície representam a mesma rotação $\pm\pi\ \mathbb{n}(\theta,\phi)$, enquanto $\varphi\,\mathbb{n}(\theta,\phi)$e $-\varphi\,\mathbb{n}(\theta,\phi)$ correspondem a rotações em sentidos opostos.

O grupo $SO(3,\mathbb{R})$ é conexo mas não simplesmente-conexo, porque o caminho fechado $\gamma : [0,2\pi] \to SO[3,\mathbb{R}]$:

$$\gamma[s] = \begin{cases} 2s\,\mathbb{n}(\theta,\phi) & s < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi\,\mathbb{n}\left(\theta + s - \dfrac{\pi}{2}, \phi\right) & \dfrac{\pi}{2} \le s \le \dfrac{3\pi}{2} \\ -(2\pi - s)\mathbb{n}(\theta,\phi) & s > \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

não é contínuamente contráctil para um ponto. (O recobrimento simplesmente-conexo de $SO(3,\mathbb{R})$ é o grupo $SU(2) \simeq S^3 \subset \mathbb{R}^4$ das matrizes complexas

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

com determinante unitário).

A realização de $SO(n,\mathbb{R})$ como matrizes ortogonais $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\,\mathbf{R}^T = \mathbf{Id}_{n\times n}$ de determinante $+1$ mostra que a dimensão deste conjunto de matrizes é

$$\mathrm{DIM}\,[SO(n,\mathbb{R})] = n^2 - \left(\frac{n^2 - n}{2} + n\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

De facto, a condição de ortogonalidade por si só engloba também rotações "impróprias" que incluem reflexões, sendo $SO(3,\mathbb{R})$ a parte conexa da identidade do grupo ortogonal $O(3,\mathbb{R})$.

As relações de ortogonalidade contêem

$$\int_{-1}^{1} \mathcal{P}_l(x)\mathcal{P}_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

para polinómios de Legendre com $l,\ l' \in \mathbb{N}$ e

$$\int_{S^2} Y_{lm}(\theta,\phi)\overline{Y_{l'm'}(\theta,\phi)}d\mu(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

para harmónicos esféricos com $m,\ m' = -l,\ -l+1,\ldots,l-1,l$.

As representações irredutíveis são parametrizadas pelo valor da componente z do momento angular $\mathbf{L}_z$. Assim, tendo em conta que o valor do momento angular total é $\mathbf{L}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle$ e $\mathbf{L}_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle$

com $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$, para $g = \varphi\, \mathbb{n}(0,0) \equiv \varphi\, e_z$, podemos escrever representações $\mathbf{U}_g^{(j)} = e^{i\,\varphi\, \mathbf{L}_z}$ onde

$$\chi^{(j)}(g) = \mathrm{TR}\left[\mathbf{U}_g^{(j)}\right] = \sum_{m=-j}^{j} \langle j, m | e^{i\,\varphi\, \mathbf{L}_z} | j, m\rangle = \sum_{m=-j}^{j} e^{i\,\varphi\, m} = \frac{\sin\left[\left(j+\frac{1}{2}\right)\varphi\right]}{\sin\left[\frac{\theta}{2}\right]}$$

Esta fórmula é válida para qualquer g já que existe sempre g' tal que $\mathbf{U}_{g' g g'^{-1}}^{(j)} = e^{i\,\varphi\, \mathbf{L}_z}$ e $\mathrm{TR}\left[\mathbf{U}_{g'}^{(j)} \mathbf{U}_g^{(j)} \overline{\mathbf{U}_{g'}^{(j)}}\right] = \mathrm{TR}[e^{i\,\varphi\, \mathbf{L}_z}]$.

4.5 Extensão de Representações

O conhecimento de representações de subgrupos de um grupo G permite deduzir representações de G. Iremos estudar dois processos para o fazer: o **"levantamento"** a G de uma representação do subgrupo G/N, quociente de G por um subgrupo normal N, e a **"indução"** de uma representação de G pela de um subgrupo qualquer $H \subset G$. Muito frequentemente H será abeliano, caso em que as representações irredutíveis de H são os seus caracteres.

[Levantamento de Representação]

Definição [4.17]

Dado um **subgrupo** normal N de G, se $\mathbf{R}_o : G/N \to \mathrm{AUT}[V]$ fôr uma representação de G/N, então

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : G &\to \mathrm{AUT}[V] \\ g &\mapsto \mathbf{R}_g = \mathbf{R}_o[Ng] \end{aligned}$$

é uma representação de G, dita **levantada** de R_o.

– A representação **levantada** de $\mathbf{R}_o$ é irredutível se $\mathbf{R}_o$ o fôr.

– O caracter da representação $\mathbf{R}$ diz-se **levantado** de χ_o e tem-se

$$\chi(g) = \mathrm{TR}[\mathbf{R}_g] = \mathrm{TR}[\mathbf{R}_o[Ng]] = \chi_o(Ng)$$

– Recíprocamente, se $\mathbf{R} : G \to \mathrm{AUT}[V]$ é uma representação de G com caracter χ, então os elementos $n \in \mathrm{KER}[\mathbf{R}]$, i.e. verificando $\chi(n) = \chi(e) = \mathrm{DIM}[V]$ formam um subgrupo normal N de G, e $\mathbf{R}_o[Ng] = \mathbf{R}_g$ é a representação de G/N de que $\mathbf{R}$ é **levantada.**

[Representações Induzidas por subgrupos]

Seja G um grupo finito e $H \subset G$ um sub-grupo de índice $[G:H] = n = \dfrac{\#G}{\#H}$. Dada uma representação $\tilde{\mathbf{U}}^H$ de H com suporte num espaço vectorial V de dimensão d, podemos estender $\tilde{\mathbf{U}}^H$ para um mapa em todo o G

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^H &: G \to \mathrm{AUT}(V) \\ g &\mapsto \quad \mathbf{U}_g^H = \begin{cases} \mathbf{0} & se\ \ g \notin H \\ \tilde{\mathbf{U}}_g^H & se\ \ g \in H \end{cases} \end{aligned}$$

Escolhido um conjunto **Transversal** qualquer $\{t_1, t_2, \ldots t_n\}$ em G/H, deve ter-se $G = \bigcup_{i=1}^{n} H\, t_i$. Então

DEFINIÇÃO [4.18]

As matrizes $\mathbf{U}_g^G = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^H_{t_1 g t_1^{-1}} & \mathbf{U}^H_{t_1 g t_2^{-1}} & \dots & \mathbf{U}^H_{t_1 g t_n^{-1}} \\ \mathbf{U}^H_{t_2 g t_1^{-1}} & \mathbf{U}^H_{t_2 g t_2^{-1}} & \dots & \mathbf{U}^H_{t_2 g t_n^{-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}^H_{t_n g t_1^{-1}} & \mathbf{U}^H_{t_n g t_2^{-1}} & \dots & \mathbf{U}^H_{t_n g t_n^{-1}} \end{pmatrix}$ verificam as condições para uma **REPRESENTAÇÃO DE G INDUZIDA** pela de H, i.e. $\forall\, g, g' \in G$ $\begin{cases} \mathbf{U}_g^G \mathbf{U}_{g'}^G = \mathbf{U}_{gg'}^G \\ \mathbf{U}_e^G = \mathbf{1} \end{cases}$

– Esta representação não depende da escolha feita para o transversal $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

– O **CARACTER INDUZIDO** χ^G é o caracter desta representação, e pode escrever-se

$$\chi^G(g) = \mathrm{TR}[\mathbf{U}_g^G] = \sum_{i=1}^{n} \chi^H(t_i g t_i^{-1})$$

DEMONSTRAÇÃO

(i) – Caso $g = e$:

Os blocos diagonais de $\mathbf{U}_e^G$ são todos $(\mathbf{U}_e^G)_{ii} = \mathbf{U}^H_{t_i e t_i^{-1}} = \mathbf{1}$, enquanto que os blocos não diagonais têm de ser nulos porque $t_i t_j^{-1} \notin H$, e portanto $(\mathbf{U}_e^G)_{ij} = \mathbf{U}^H_{t_i e t_j^{-1}} = \mathbf{0}$. De facto, se $t_i t_j^{-1} \in H$, então $t_i \in H t_j$, o que não pode ser já que os t_i formam um conjunto **TRANSVERSAL** de G.

(ii) – Caso $g \neq e$:

Se $t_i g g' t_j^{-1} \notin H$ então, qualquer que seja o t_r, uma das afirmações $t_i g t_r^{-1} \notin H$ ou $t_r g' t_j^{-1} \notin H$ é verdadeira, porque se ambos pertencessem a H, teríamos $t_i g t_r^{-1} t_r g' t_j^{-1} = t_i g g' t_j^{-1} \in H$, em contradição com o pressuposto. Portanto,

$$(\mathbf{U}_{gg'}^G)_{ij} = \mathbf{0} = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{U}^H_{t_i g t_r^{-1}} \mathbf{U}^H_{t_r g' t_j^{-1}} = (\mathbf{U}_g^G \mathbf{U}_{g'}^G)_{ij}$$

Se $t_i g g' t_j^{-1} \in H$ por outro lado, existe um t_s tal que $t_i g \in H t_s$. Mas então $t_s g' t_j^{-1} = (t_i g t_s^{-1})^{-1}(t_i g g' t_j^{-1}) \in H$ e portanto

$$(\mathbf{U}_{gg'}^G)_{ij} = \mathbf{U}^H_{t_i g g' t_j^{-1}} = \mathbf{U}^H_{t_i g t_s^{-1}} \mathbf{U}^H_{t_s g' t_j^{-1}} \tag{4-12}$$

Mas como $t_i g t_r^{-1} \notin H$ se $r \neq s$, $\mathbf{U}^H_{t_i g t_r^{-1}} = \mathbf{0}$ e o último termo de **(4-12)** pode reescrever-se como um somatório (no qual todos os termos excepto o de $r = s$ são nulos)

$$(\mathbf{U}_{gg'}^G)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \mathbf{U}^H_{t_i g t_r^{-1}} \mathbf{U}^H_{t_r g' t_j^{-1}} = (\mathbf{U}_g^G \mathbf{U}_{g'}^G)_{ij} \qquad \blacksquare$$