

CAPÍTULO 5

GRUPOS DE LIE

Conteúdo

5.1 Grupos Topológicos	65
[Topologia]	65
[Carta Local]	66
[Funções de Transição]	67
[Variedade Topológica]	67
[Grupo Topológico]	67
5.2 Grupos de Lie	68
[Diferenciabilidade]	68
[Grupo de Lie]	68
[Grupos e Álgebras de Lie Clássicos]	69
[Grupo Ortogonal $G = O_2(\mathbb{R})$]	69
[Grupo Unitário especial $G = SU_2(\mathbb{C})$]	70
[Álgebra de Lie $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$]	70
[Grupo $G = SO_3(\mathbb{R})$]	71
5.3 Representações Irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$	72
5.3.1 O grupo de Möbius $\tilde{M}$	72
5.3.2 Projecção Estereográfica e $SU_2(\mathbb{C})$	73
5.3.3 Ângulos de Euler	74
5.4 O grupo $SO_3(\mathbb{R})$ de rotações em $\mathbb{R}^3$	76
5.5 Representação induzida por $SU_2(\mathbb{C})$	77
5.5.1 Representações Irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$	79
5.5.2 Raízes e Forma Canónica de Relações de Comutação	79
5.5.3 Constantes de Estrutura e Representação Regular de álgebra	80
5.6 Medida Invariante Sobre um Grupo	81
[Espaços de Medida]	81
[Medida de Haar]	81
5.7 Representações de Grupos Infinitos	82
[Teorema de Peter-Weyl]	82
[Dualidade de Grupos]	83
[Teorema de Pontryagin]	83
[Teorema de Plancherel]	84
5.8 Decomposição de Mackey	86
[Teorema de Mackey]	86

5.9 Medidas c/valor Projecção	87
[Teorema Espectral para Grupos Abelianos]	87
5.10 Representações Induzidas	88
5.11 Sistemas de Imprimitividade	92
5.12 Produtos Semi-directos	93
5.13 Acção Co-Adjunta e Órbitas em $\mathfrak{g}^*$	96

5.1 Grupos Topológicos

[Topologia]

DEFINIÇÃO [5.1]

Dotar um espaço M duma **TOPOLOGIA** significa escolher uma colecção $\mathcal{T}_M$ de subconjuntos $O \subset M$, designados **ABERTOS** de M , de forma que:

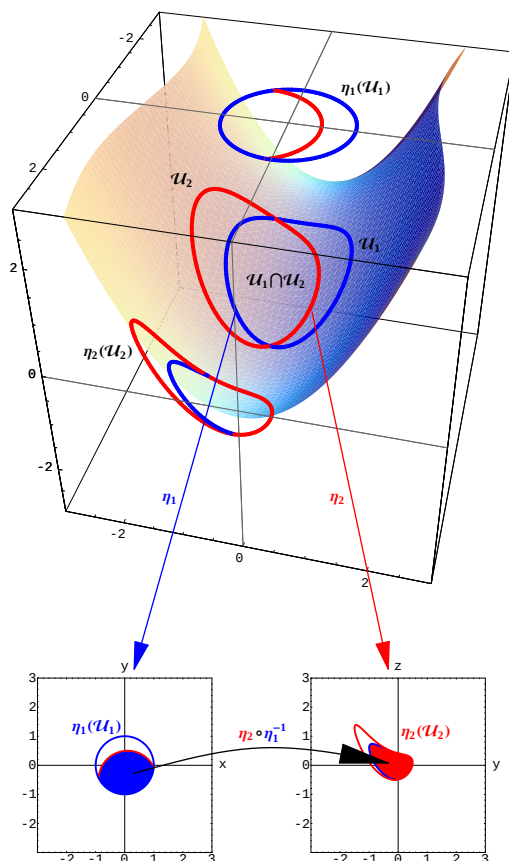
- IV.1 - i . O próprio M e o conjunto vazio $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{T}_M$, i.e. são abertos;
- IV.1 - ii . Qualquer **INTERSECÇÃO** dum número **FINITO** de abertos é um aberto;
- IV.1 - iii . Qualquer **UNIÃO** dum número **FINITO OU INFINITO** de abertos é um aberto.

Uma **BASE** para a topologia de M é uma sub-colecção $\mathcal{B}_I \subseteq \mathcal{T}_M$ de abertos tal que qualquer aberto $O \in \mathcal{T}_M$ se pode obter como uma união $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ de abertos $O_i \in \mathcal{B}_I$.

Se $Q \subset M$ for um sub-conjunto de um espaço topológico M , uma topologia possível $\mathcal{T}_Q$ sobre Q é a **TOPOLOGIA DE SUB-CONJUNTO** (i.e. a topologia cujos abertos $\mathcal{U} = Q \cap O$ são as intersecções de Q com os abertos $O \in \mathcal{T}_M$ da topologia de M). Por outro lado, Q nem sempre é definido como um sub-conjunto doutro espaço topológico, e mesmo quando o é, a topologia de sub-conjunto pode não ser a mais útil ou a que nos interesse mais definir sobre Q . Duas restrições que devemos fazer às estruturas topológicas admissíveis (por razões técnicas futuramente justificáveis) são as seguintes:

[HAUSDORF] Um espaço topológico M diz-se Hausdorff se e só se, para todo o par de pontos distintos $m \neq m' \in M$, existem dois abertos disjuntos $O \cap O' = \emptyset$ tais que $m \in O$ e $m' \in O'$. A condição de Hausdorff é por si só **SUFICIENTE** para garantir a unicidade de solução para equações diferenciais em M .

[SEPARÁVEL] Um espaço topológico M diz-se **SEPARÁVEL** (“second countable”, “separable”) se possui uma base de topologia **NUMERÁVEL**. Separabilidade e Hausdorff são, em conjunto, condição **SUFICIENTE** para garantir a existência de **PARTIÇÕES DA UNIDADE**, que por sua vez são necessárias para a construção de estruturas geométricas importantes, como seja toda a teoria de integração em variedades, estruturas Riemannianas, métricas, etc.



Um conjunto M tem **DIMENSÃO** n se existirem injecções $\eta_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (i.e. aplicações η_α para as quais $\eta_\alpha(m) = \eta_\alpha(m') \implies m \equiv m'$) que estabelecem a correspondência “ponto $m \in \mathcal{U}_\alpha$ ” $\longleftrightarrow$ “ n parâmetros reais”, estando cada uma delas possivelmente definida apenas num sub-conjunto $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ (o ‘**DOMÍNIO**’ de η_α), mas de forma que $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$.

Note que o conjunto de pares $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ é enorme, e que o conjunto I dos índices α é certamente não-numerável.

Assim, o que se propõe é o seguinte: dado que existe uma topologia ‘standard’ em $\mathbb{R}^n$, e dado que M pode ser ‘**COBERTO**’ pela união de sub-conjuntos $\mathcal{U}_\alpha$ em correspondência bijectiva com um sub-conjunto $\eta_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, vamos **INDUZIR** uma topologia em M que resulte em chamar **ABERTOS** aos domínios $\mathcal{U}_\alpha$ e **CONTÍNUAS** às injecções η_α . Por isso é que, de todos os pares $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ possíveis, vamos restringir-nos àqueles em que a imagem $\eta_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ é um **ABERTO** na topologia normal em $\mathbb{R}^n$. Esta regra está na origem da seguinte definição:

[Carta Local]

DEFINIÇÃO [5.2]

Uma **CARTA LOCAL** num espaço M é um par $(\mathcal{U}, \eta)$ formado por um sub-conjunto $\mathcal{U} \subset M$ e uma aplicação $\eta : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ que estabelece uma correspondência **BIJECTIVA** entre $\mathcal{U}$ e um **ABERTO** $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Escolhida uma base de $\mathbb{R}^n$, as componentes $\eta^i \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ de $\eta = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)$ formam um **SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS** associado.

Mas, por definição de topologia, a intersecção de um número finito de abertos deve ser um aberto. Assim, se queremos designar os domínios $\mathcal{U}_\alpha$ de **ABERTOS** numa topologia de M , temos que exigir também, de acordo com (ii), que a imagem numa intersecção não-vazia de um número finito de domínios $\mathcal{U}_\alpha$ seja um aberto de $\mathbb{R}^n$. A partir daqui, os pares $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ que verificam estas condições vão-se dividir em colecções $\mathcal{A}_M = \{(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)\}$ distintas, designadas **ATLAS** sobre M , para cada uma das quais é verdade que

$$\mathcal{W} = \mathcal{U}_{\alpha_1} \cap \mathcal{U}_{\alpha_2} \dots \cap \mathcal{U}_{\alpha_k} \neq \emptyset \implies \eta_{\alpha_r}(\mathcal{W}) \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n ; \forall \alpha_r \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$$

Esta importante condição pode ser reformulada de forma mais conveniente usando o conceito de **FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO**:

[Funções de Transição]

DEFINIÇÃO [5.3]

Numa colecção de cartas locais $\mathcal{A}_M$, dados dois quaisquer $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha), (\mathcal{U}_\beta, \eta_\beta) \in \mathcal{A}_M$ tais que $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, a **FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO** $\zeta_{\alpha\beta} \doteq \eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1}$ é uma **BIJEÇÃO CONTÍNUA DE INVERSO CONTÍNUO**, i.e. um **HOMEOMORFISMO**

$$\zeta_{\alpha\beta} : \eta_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha\beta}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \eta_\beta(\mathcal{U}_{\alpha\beta}) \subset \mathbb{R}^n$$

De acordo com esta condição, todo o par $(\mathcal{U}, \eta)$, onde $\mathcal{U} = \eta_\alpha^{-1}(O)$, $\eta = [\eta_\alpha]_{\mathcal{U}}$ e $O \subset \eta_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, faz parte das mesmas colecções que $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$. Podemos assim garantir que, numa colecção de cartas $\mathcal{A}_M$ cujas funções de transição estejam nas condições acima, o conjunto dos domínios $\mathcal{U}_\alpha$ forma uma **BASE DE TOPOLOGIA** de M , e que nessa topologia as injecções η_α são **BIJECTIVAS** (i.e. homeomorfismos sobre os respectivos contradomínios).

[Variedade Topológica]

DEFINIÇÃO [5.4]

Dotar M duma estrutura de **VARIEDADE TOPOLÓGICA** consiste em associar-lhe um **ATLAS COMPLETO** $\mathcal{A}_M$ cuja colecção de **CARTAS LOCAIS** $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ verificam as condições da **DEFINIÇÃO [5.3]**.

[Grupo Topológico]

DEFINIÇÃO [5.5]

Um grupo G dotado de uma topologia $\mathcal{T}_G$ para a qual o produto no grupo e a inversão dum elemento do grupo sejam contínuas designa-se um **GRUPO TOPOLÓGICO**.

- Um grupo topológico diz-se **SEPARÁVEL** se existir uma **BASE NUMERÁVEL** para os conjuntos abertos.
- Um grupo topológico diz-se **LOCALMENTE COMPACTO** (L.C.) se cada ponto tem uma vizinhança compacta, ou se contém um **ABERTO** cujo fecho é **COMPACTO**. Por Exemplo:

[L.C.]– Os grupos $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SO(3, \mathbb{R})(\text{compacto})$, $SL(2, \mathbb{C})$ são **LOCALMENTE COMPACTOS**

[NÃO L.C.]– Os grupos de dimensão infinita, como o grupo de transformações de Gauge da Electrodinâmica Quântica : $A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi$, as quais deixam invariantes os campos $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ **NÃO SÃO LOCALMENTE COMPACTOS**.

5.2 Grupos de Lie

[Diferenciabilidade]

A possibilidade de definir um conceito de **FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL** sobre M leva-nos a mais uma restrição na definição dos atlas $\mathcal{A}_M^0$. Uma vez mais, a possibilidade de identificar localmente M com $\mathbb{R}^n$ vai-nos permitir utilizar a estrutura euclideana de $\mathbb{R}^n$ para induzir sobre M noções que dependem necessariamente da existência de um conceito de **DISTÂNCIA**, como por exemplo o de **DERIVADA** de uma aplicação. Assim, vamos considerar que, num ponto $m \in M$ coberto por uma carta local $(\mathcal{U}, \eta)$, uma dada função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $f \circ \eta^{-1} : \eta(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável de classe C^r em m .

(5-1)

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{U} \subset M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \eta \downarrow & \nearrow f \circ \eta^{-1} \in C^r_{\eta(\mathcal{U})}(\mathbb{R}) & \\
 \eta(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n & &
 \end{array}$$

Nítidamente esta condição depende da carta local que se escolhe em $\mathcal{A}_M^0$ para cobrir m . Contudo, é possível **POR VEZES** encontrar sub-colecções $\mathcal{A}_M^r$ cujas cartas cobrem M de forma que (5-1) se verifique para quaisquer $(\mathcal{U}_i, \eta_i) \in \mathcal{A}_M^r$ e $f \in \mathcal{F}_M(\mathbb{R})$.

Dado que na intersecção de domínios $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ se tem $f \circ \eta_j^{-1} = (f \circ \eta_i^{-1}) \circ (\eta_i \circ \eta_j^{-1})$ isso é equivalente a impôr que $\eta_i \circ \eta_j^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja de classe C^r para todos os pares $(\mathcal{U}_i, \eta_i), (\mathcal{U}_j, \eta_j) \in \mathcal{A}_M^r$ que tenham $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$.

[Grupo de Lie]

DEFINIÇÃO [5.6]

Um grupo G diz-se um **GRUPO DE LIE** se tiver uma estrutura de variedade analítica $\mathcal{A}_G^\omega$ compatível com a do grupo, i.e. o mapa $\mathcal{R} : G \times G \rightarrow G$ definido por $\mathcal{R}(g, g') = g'g^{-1}$ é analítico.

[Grupos e Álgebras de Lie Clássicos]

Os grupos de simetria clássicos agrupam-se em três classes básicas distintas:

[**ORTOGONAL**] grupos que preservam métricas reais = formas bilineares simétricas

$$(\text{Álgebras } \mathfrak{B}_n = \mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{R}) \text{ ou } \mathfrak{D}_n = \mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{R}))$$

[**UNITÁRIA**] grupos que preservam métricas complexas = formas bilineares hermiticas

$$(\text{Álgebras } \mathfrak{B}_n = \mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C}) \text{ ou } \mathfrak{D}_n = \mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C}))$$

[**SIMPLÉTICA**] grupos que preservam estrutura complexa $\Leftarrow$ formas bilineares anti-simétricas

$$(\text{Álgebras } \mathfrak{C}_n = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}))$$

Variações dentro de cada classe resumem-se a diferentes condições de realidade sobre os parâmetros da álgebra de Lie.

Grupo de Lie	Álgebra de Lie	$\mathbb{C}$ -Dim	$\mathbb{R}$ -Dim
$GL_n(\mathbb{F}) = \{T \in M_{n \times n} \simeq \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^{n*} : \det[T] \neq 0\}$	$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_{n \times n} \simeq \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^{n*}\}$	n^2	$2n^2$
$SL_n(\mathbb{F}) = \{T \in GL_n(\mathbb{F}) : \det[T] = 1\}$	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : \text{Tr}[A] = 0\}$	$n^2 - 1$	$2n^2 - 2$
$O_n(\mathbb{F}) = \{T \in GL_n(\mathbb{F}) : T^\top = T^{-1}\}$	$\mathfrak{o}_n(\mathbb{F}) \equiv \mathfrak{so}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : A^\top = -A\}$	$\frac{1}{2}(n^2 - n)$	$n^2 - n$
$SO_n(\mathbb{F}) = \{T \in O_n(\mathbb{F}) : \det[T] = 1\}$	$\mathfrak{so}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : A^\top = -A \Rightarrow \text{Tr}[A] = 0\}$	$\frac{1}{2}(n^2 - n)$	$n^2 - n$
$U_n(\mathbb{C}) = \{T \in GL_n(\mathbb{C}) : T^\dagger = T^{-1}\}$	$\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A^\dagger = -A\}$	n^2	—
$SU_n(\mathbb{C}) = \{T \in U_n(\mathbb{C}) : \det[T] = 1\}$	$\mathfrak{su}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) : \text{Tr}[A] = 0\}$	$n^2 - 1$	—
$Sp_{n/2}(\mathbb{F}) = \{T \in GL_n(\mathbb{F}) : T^\top J T = J\}$	$\mathfrak{sp}_{n/2}(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : A^\top J = -J A\}$	$\frac{1}{2}(n^2 + n)$	$n^2 + n$
$USp_{n/2}(\mathbb{C}) = Sp_{n/2}(\mathbb{C}) \cap U_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{usp}_{n/2}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A^\top J = -J A, A^\dagger = -A\}$	$\frac{1}{2}(n^2 + n)$	—

[Grupo Ortogonal $G = O_2(\mathbb{R})$]

$$\text{Dim}(G) = \frac{1}{2}(2^2 - 2) = 1$$

Se pusermos $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbf{T}^\top = \mathbf{T}^{-1}$ donde

$$\begin{pmatrix} T_{11}^2 + T_{21}^2 & T_{11} T_{12} + T_{21} T_{22} \\ T_{11} T_{12} + T_{21} T_{22} & T_{12}^2 + T_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^2 + T_{12}^2 & T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} \\ T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} & T_{21}^2 + T_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Isto equivale a afirmar que $\begin{cases} T_{12}^2 = T_{21}^2 \\ T_{11}^2 = T_{22}^2 \end{cases}$ e $\begin{cases} T_{11}^2 + T_{12}^2 = 1 \\ T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} = 0 \end{cases}$ donde ou $\begin{cases} T_{12} = -T_{21} \\ T_{11} = T_{22} \end{cases} \Rightarrow \text{DET}[\mathbf{T}] = 1$, i.e.

$\mathbf{T} \in SO_2(\mathbb{R})$, ou $\begin{cases} T_{12} = T_{21} \\ T_{11} = -T_{22} \end{cases} \Rightarrow \text{DET}[\mathbf{T}] = -1$. Assim

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \mp \sqrt{1 - \alpha^2} \\ \pm \sqrt{1 - \alpha^2} & \mp \alpha \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

Para $\mathbf{T} \in SO_2(\mathbb{R})$ podemos ver que é a componente simplesmente conexa de matrizes da forma

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = e^{\theta \mathbb{A}}$$

onde o grupo a um parâmetro $\mathbf{T}_\theta = e^{\theta \mathbb{A}}$ é definido pelo elemento $\mathbb{A} \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$, onde

$$\mathbb{A} = \left(\frac{d\mathbf{T}_\theta}{d\theta} \right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como é de esperar $\mathbb{A}$ é antisimétrica.

[Grupo Unitário especial $G = SU_2(\mathbb{C})$]

$$\text{DIM}(G) = (2^2 - 1) = 3$$

Neste caso $\mathbf{T} \in SU_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T}^{-1}$; $\text{DET}(\mathbf{T}) = 1$ donde as equações que resultam de $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^\dagger$, $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} = \mathbf{1}$ e $\text{DET}[\mathbf{T}] = 1$ são

$$\begin{aligned} |T_{21}|^2 &= |T_{12}|^2 & |T_{11}|^2 + |T_{21}|^2 &= 1 \\ (T_{11} - T_{22})\bar{T}_{21} &= (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) T_{12} & |T_{21}|^2 + |T_{22}|^2 &= 1 \\ \bar{T}_{12} T_{11} + \bar{T}_{22} T_{21} &= 0 & T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} &= 1 \end{aligned}$$

De $|T_{21}|^2 = |T_{12}|^2$ e $|T_{11}|^2 + |T_{21}|^2 = |T_{21}|^2 + |T_{22}|^2 = 1$ conclui-se $|T_{22}|^2 = |T_{11}|^2$. Escrevendo

$$T_{11} = e^{i\theta} \alpha \quad T_{21} = e^{i\varphi} \bar{\beta} \quad T_{22} = \bar{\alpha} \quad T_{12} = \beta$$

conclui-se que $\theta = 0$, $\varphi = \pi$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ donde a forma mais geral de elemento é

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \beta = x + iy \\ \alpha = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} + iz \end{cases}$$

[Álgebra de Lie $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$]

A respectiva álgebra de Lie é gerada pelas matrizes que se obtêm a partir da parametrização indicada através de tangentes a grupos-a-um-parâmetro passando pela identidade. Neste caso, grupos-a-um-parâmetro convenientes são:

$$\mathbf{T}_x(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2} & s \\ -s & \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_y(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2} & i s \\ i s & \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_z(s) = \begin{pmatrix} i s + \sqrt{1-s^2} & 0 \\ 0 & -i s + \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}$$

donde

$$\left(\frac{d\mathbf{T}_x(s)}{ds} \right)_{s=0} = \mathbb{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{d\mathbf{T}_y(s)}{ds} \right)_{s=0} = \mathbb{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{d\mathbf{T}_z(s)}{ds} \right)_{s=0} = \mathbb{A}_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Os comutadores destas matrizes determinam as relações de comutação que caracterizam a álgebra de Lie. De facto, o produto de Lie não é mais do que uma derivação interior.

$$[\mathbb{A}_x, \mathbb{A}_y] = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2\mathbb{A}_z \quad [\mathbb{A}_x, \mathbb{A}_z] = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = -2\mathbb{A}_y \quad [\mathbb{A}_y, \mathbb{A}_z] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbb{A}_x$$

Lembrando as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \mathbb{A}_y, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i \mathbb{A}_x, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i \mathbb{A}_z$$

vemos que poderíamos escolher outra base $\mathbb{E}_k = -\frac{1}{2}i \sigma_k$ com $k = 1, 2, 3$, e relações que se simplificam em

$$[\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_j] = \epsilon_{ij}^k \mathbb{E}_k$$

onde $\epsilon_{ij}^k = \epsilon_{ijr} \delta^{rk} = \pm 1$ é o sinal da permutação de índices $\begin{pmatrix} 123 \\ ijk \end{pmatrix}$.

[Grupo $G = SO_3(\mathbb{R})$]

$$\text{DIM}(G) = \frac{1}{2}(3^2 - 3) = 3$$

$SO_3(\mathbb{R})$ é o grupo de invariância duma forma bilinear simétrica em $\mathbb{R}^3$ e cuja acção preserva a forma de volume. Isto significa que, qualquer que seja $\mathbf{T} \in SO_3(\mathbb{R})$, se tem $\langle \mathbf{T}\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, ou seja $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = 1 = \mathbf{T} \mathbf{T}^T$. Mas então, para qualquer grupo-a-um-parâmetro de elementos destes deve ter-se $\mathbf{T}(s)^T \mathbf{T}(s) = 1$. A tangente junto à identidade $\mathbf{T}(0) = 1$ mostra que os elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ verificam

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{T}(s)^T \mathbf{T}(s)) \equiv 0 = \frac{d\mathbf{T}(s)^T}{ds} \mathbf{T}(s) + \mathbf{T}(s)^T \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}$$

donde

$$\left(\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \right)^T_{s=0} = - \left(\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \right)_{s=0}$$

Concluimos assim que $\mathbb{A} \in \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ se $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$, i.e. se $\mathbb{A}$ for anti-simétrica, o que implica neste caso que $\text{Tr}[\mathbb{A}^T] = \text{Tr}[\mathbb{A}] = -\text{Tr}[\mathbb{A}]$, i.e. $\text{Tr}[\mathbb{A}] = 0$. Geralmente esta condição deduz-se de $\text{DET}[e^{\mathbb{A}}] \equiv e^{\text{Tr}[\mathbb{A}]}$, e em geral trata-se duma condição separada aplicável aos grupos especiais onde se exige $\text{DET}[\mathbf{T}] = 1$. Assim, na vizinhança da identidade $\mathbf{T}(s) = e^{s\mathbb{A}}$, donde

$$\text{DET}[e^{s\mathbb{A}}] = e^{s\text{Tr}[\mathbb{A}]} = 1 \implies \text{Tr}[\mathbb{A}] = 0$$

Esta é a razão porque a álgebra de Lie de $O_3(\mathbb{R})$ e $SO_3(\mathbb{R})$ coincidem. Uma base para $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ é

$$\mathbb{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com relações de comutação

$$[\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2] = \mathbb{L}_3, \quad [\mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3] = \mathbb{L}_1, \quad [\mathbb{L}_3, \mathbb{L}_1] = \mathbb{L}_2, \quad \text{i.e.} \quad [\mathbb{L}_i, \mathbb{L}_j] = \epsilon_{ij}^k \mathbb{L}_k$$

onde $\epsilon_{ij}^k = \pm 1$ é o sinal da permutação $(123) \rightarrow (ijk)$.

Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, para cada elemento $\mathbb{A} \in \mathfrak{g}$ o operador adjunto $ad_{\mathbb{A}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definido por

$$ad_{\mathbb{A}}(\mathbb{B}) = [\mathbb{A}, \mathbb{B}]$$

é uma derivação de $\mathfrak{g}$ e a correspondência $\mathbb{A} \rightarrow ad_{\mathbb{A}}$ é uma representação da álgebra dita Regular.

No caso de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$, com a base indicada, podemos escrever

$$ad_{\mathbb{A}} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

para $\mathbb{A} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$, o que torna o espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto vectorial convencional $\times$ numa álgebra isomorfa a $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$.

$$ad_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bx - ay & cx - az \\ ay - bx & 0 & cy - bz \\ az - cx & bz - cy & 0 \end{pmatrix} = ad_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$$

5.3 Representações Irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$

5.3.1 O grupo de Möbius $\tilde{M}$

O grupo de transformações $\tilde{M}$ do plano complexo

$$(5-1) \quad \mathcal{M}_{cd}^{ab} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{com } ad - bc \neq 0$$

pode ser realizado por matrizes complexas de dimensão 2, i.e. matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ de determinante unidade (já que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ representam a mesma transformação **(5-1)**). Existe mesmo um recobrimento $\Upsilon : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{M}$ que a toda a matriz complexa $g = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para λ arbitrário faz corresponder o mesmo $\Upsilon(g) = \mathcal{M}_{cd}^{ab}$. Podemos portanto escolher, para cada $\mathcal{M}_{cd}^{ab}$, valores de λ que verifiquem

$$\text{DET}(g) = \lambda^2(ad - bc) = 1$$

Assim podemos restringir o recobrimento a $\Upsilon : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \tilde{M}$, mas note-se que a realização de $\tilde{M}$ por matrizes $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ ainda é de 2 para 1 já que g e $-g \in SL_2(\mathbb{C})$ resultam no mesmo elemento $\mathcal{M}_{cd}^{ab}$ de $\tilde{M}$. Isto significa que embora $SL_2(\mathbb{C})$ seja simplesmente conexo, $\tilde{M}$ não o é (porque alguns caminhos fechados de $\tilde{M}$ não podem deformar-se para um ponto, e.g. a imagem de qualquer caminho que comece em $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e acabe em $g' = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$).

O espaço vectorial suporte desta representação de $SL_2(\mathbb{C})$ é $\mathbb{C}^2$ e os seus vectores $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ chamam-se **spinores**. A acção de $SL_2(\mathbb{C})$ em $\mathbb{C}^2$ definida naturalmente por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

traduz-se numa acção de $\tilde{M}$ em $\mathbb{C}$ através da identificação

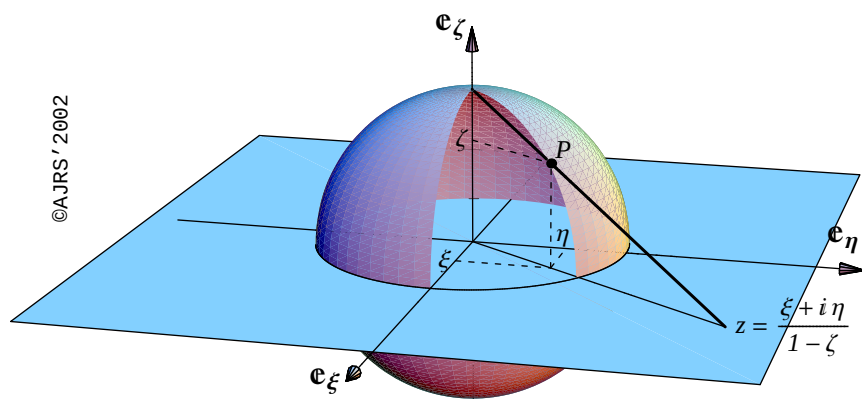
$$z = \frac{u}{v} \mapsto z' = \frac{u'}{v'} = \frac{az + b}{cz + d}$$

Resumindo

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{SL_2(\mathbb{C})} & \mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ z = \frac{u}{v} \in \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{M}} & \mathbb{C} \ni z' = \frac{u'}{v'} = \frac{az + b}{cz + d} \end{array}$$

Esta acção restrita ao subgrupo real $SL_2(\mathbb{R})$ deixa invariante o **SEMI-PLANO DE POINCARÉ** $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, onde $SL_2(\mathbb{R})$ age transitivamente e onde existe uma medida invariante $ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{\text{Im}(z)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

5.3.2 Projecção Estereográfica e $SU_2(\mathbb{C})$



Esta imagem mostra como, na carta estereográfica $\{\mathcal{U}_+, \phi_+\}$ com origem no pólo $\{0, 0, 1\}$, a cada ponto z do plano complexo $\mathbb{C}$ corresponde a um ponto $P = \{\xi, \eta, \zeta\}$ sobre a esfera de raio unidade, com coordenadas

$$\xi = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1} \quad ; \quad \eta = \frac{2 \operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1} \quad ; \quad \zeta = -\frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1}$$

Reciprocamente as coordenadas do ponto $P = \{\xi, \eta, \zeta\}$ correspondem a

$$\{\xi, \eta, \zeta\} \longleftrightarrow z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} \{1, 0, 0\} \longleftrightarrow z = 1 & \{-1, 0, 0\} \longleftrightarrow z = -1 \\ \{0, 1, 0\} \longleftrightarrow z = i & \{0, -1, 0\} \longleftrightarrow z = -i \\ \{0, 0, 1\} \longleftrightarrow z = \infty & \{0, 0, -1\} \longleftrightarrow z = 0 \end{array}$$

Significa isto que uma rotação $R_\xi(\frac{\pi}{2})$ de $\theta = \frac{\pi}{2}$ em torno de e_ξ deve fazer $0 \rightarrow i \rightarrow \infty \rightarrow -i \rightarrow 0$ e corresponder assim à transformação de Möbius, e à matriz de $SU_2(\mathbb{C})$

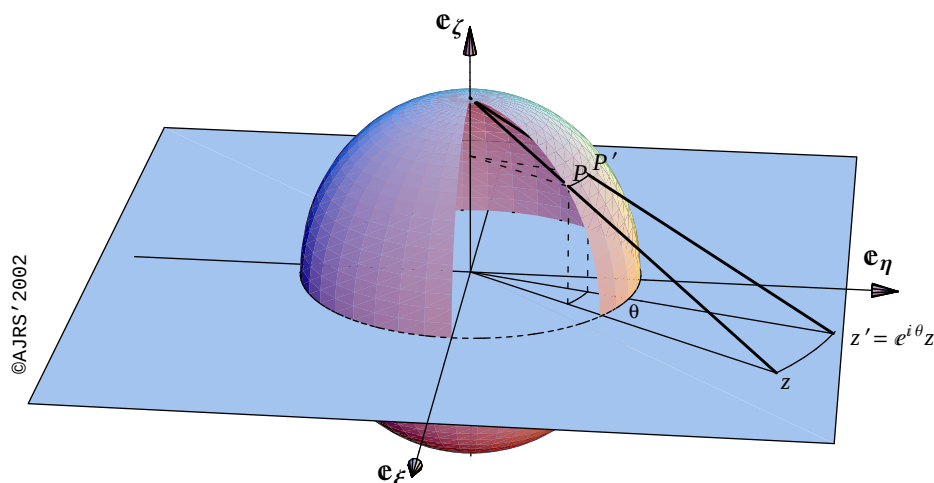
$$R_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z' = \frac{z + i}{iz + 1} \quad \Leftarrow \quad U_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Uma rotação $R_\eta(\frac{\pi}{2})$ por outro lado faz $0 \rightarrow 1 \rightarrow \infty \rightarrow -1 \rightarrow 0$ e deve corresponder a

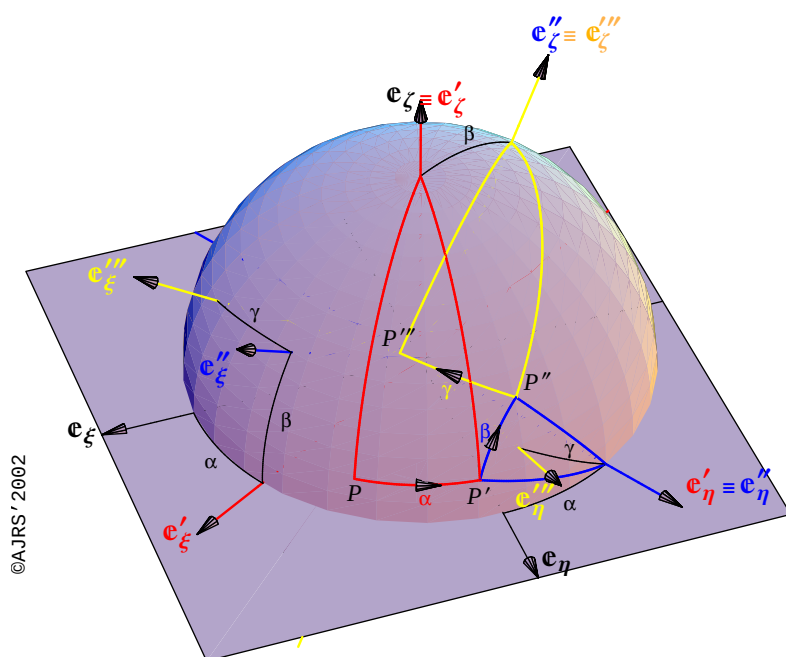
$$R_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow z' = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \Leftarrow \quad U_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como é que uma rotação $R_\zeta(\theta)$ em torno do eixo e_ζ afecta z ? De facto z' é simplesmente $z' = e^{i\theta}z$, e temos uma correspondência

$$R_\zeta(\theta) \Rightarrow z' = e^{i\theta}z \quad \Leftarrow \quad U_\zeta(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}$$



5.3.3 Ângulos de Euler



A parametrização convencional de Euler para rotações faz-se através de três ângulos α, β, γ , sendo possível verificar que qualquer outro ponto P''' da esfera que passa por P se obtém:

1. rodando P de α graus em torno dum eixo $e_z \equiv e_z'$ para P' ,
2. seguidamente rodando β graus em torno do eixo $e_\eta' \equiv e_\eta''$ (que resultou da primeira rotação de e_η) para P''
3. e finalmente rodando de γ graus em torno dum eixo e_z'' (que resultou da segunda rotação de $e_z' \equiv e_z$).

Acontece que a rotação genérica definida por $R_{\alpha\beta\gamma} = R_{z''}(\gamma)R_{\eta'}(\beta)R_z(\alpha)$ pode ser referida a eixos fixos e_z e e_η com os mesmos ângulos α, β, γ , embora por ordem diferente. De facto podemos ver que

$$R_{z''}(\gamma) = R_{\eta'}(\beta)R_z(\gamma)R_{\eta'}^{-1}(\beta)$$

donde

$$\begin{aligned} R_{z''}(\gamma)R_{\eta'}(\beta)R_z(\alpha) &= R_{\eta'}(\beta)R_z(\gamma)R_z(\alpha) \\ &= R_{\eta'}(\beta)R_z(\alpha)R_z(\gamma) \end{aligned}$$

De forma semelhante, temos

$$R_{\eta'}(\beta) = R_z(\alpha)R_{\eta}(\beta)R_z^{-1}(\alpha)$$

donde

$$R_{\eta'}(\beta)R_z(\alpha)R_z(\gamma) = R_z(\alpha)R_{\eta}(\beta)R_z(\gamma)$$

Ou seja

$$R_{\alpha\beta\gamma} = R_{z''}(\gamma).R_{\eta'}(\beta)R_z(\alpha) = R_z(\alpha)R_{\eta}(\beta)R_z(\gamma)$$

Na realidade, são sempre necessários três ângulos para parametrizar uma rotação, porque dois definem a direcção do eixo de rotação

$$n(\theta, \varphi) = \cos(\varphi) \sin(\theta) e_1 + \sin(\varphi) \sin(\theta) e_2 + \cos(\theta) e_3 = a e_1 + b e_2 + c e_3$$

enquanto o terceiro ϕ determina a magnitude da rotação em torno desse eixo. De facto, a matriz de $SU_2(\mathbb{C})$, recobrimento universal de $SO_3(\mathbb{R})$, que representa essa rotação é simplesmente

$$U_{\mathfrak{n}(\theta, \varphi)}(\phi) = e^{-i \frac{\phi}{2} \mathfrak{n}(\theta, \varphi) \cdot \sigma} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i c \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-a i - b) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-a i + b) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i c \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

onde $\sigma = \sum_{k=1}^3 \sigma_k e_k$ é um vector formal definido pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Note-se que a cada σ_k corresponde a uma rotação de ϕ em torno de um eixo e_k . Assim podemos indicar

$$U_{e_1}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad U_{e_2}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad U_{e_3}(\phi) = \begin{bmatrix} e^{-i \frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i \frac{\phi}{2}} \end{bmatrix}$$

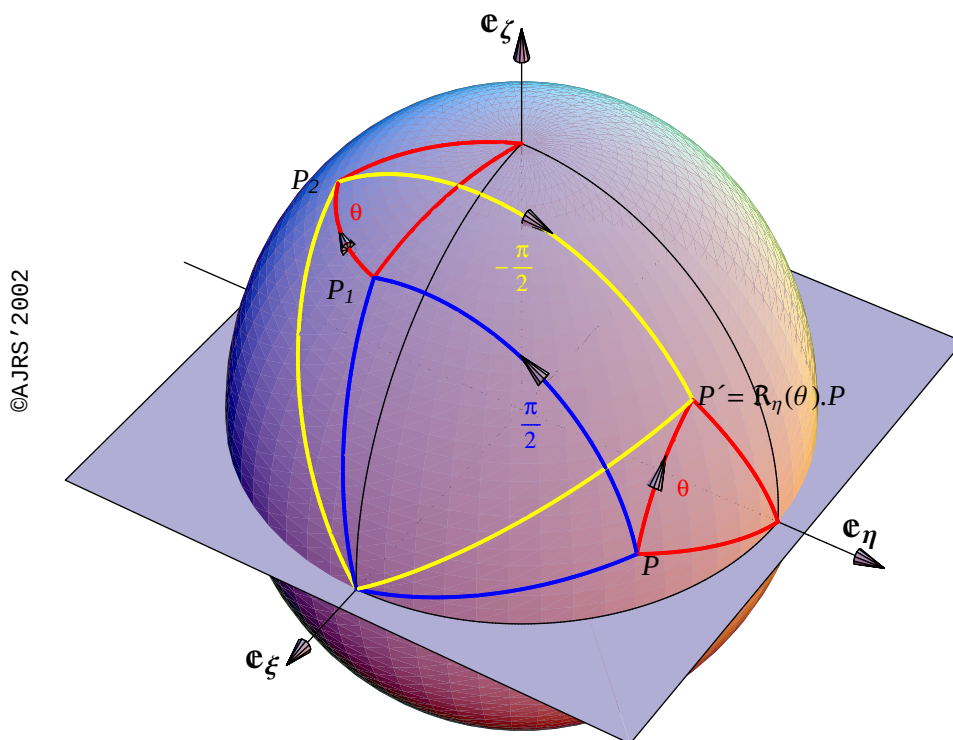
Poderíamos questionarmo-nos sobre a relação entre esta parametrização e a de Euler, a qual pode ser deduzida da expressão genérica para $SU_2(\mathbb{C})$ que é

$$U_{\alpha\beta\gamma} = \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-i \frac{(\alpha+\gamma)}{2}} & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{-i \frac{(\alpha-\gamma)}{2}} \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i \frac{(\alpha-\gamma)}{2}} & -\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i \frac{(\alpha+\gamma)}{2}} \end{bmatrix}$$

Claro que podemos raciocinar (erróneamente) da seguinte maneira: rodar o eixo e_z até coincidir com $e''_z = \mathfrak{n}(\theta, \varphi)$ e seguidamente rodar ϕ graus em torno de e''_z . Com esta identificação vemos que $\phi = \gamma$, mas a identificação restante é inviável porque $e^{-i \frac{\phi}{2} \mathfrak{n}(\theta, \varphi) \cdot \vec{\sigma}}$ tem muitas formas de decomposição em produto de três rotações.

Na realidade, qualquer rotação $R_\eta(\theta)$ em torno de e_η pode ser encarada como uma rotação pelo mesmo ângulo θ em torno de e_z através duma composição

$$R_\eta(\theta) = R_\xi\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_z(\theta) R_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



©AJRS'2002

Note que rotações positivas são retrógradas para $\mathbf{e}_\xi$ e $\mathbf{e}_\zeta$ e directas para $\mathbf{e}_\eta$. Para $\mathbf{e}_\xi$ e $\mathbf{e}_\eta$ ambas começam no plano horizontal no sentido $\mathbf{e}_\zeta$, enquanto que as geradas por $\mathbf{e}_\zeta$ começam no plano $\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\zeta$.

5.4 O grupo $SO_3(\mathbb{R})$ de rotações em $\mathbb{R}^3$

Vamos agora usar projecções estereográficas para cartografar $SO_3(\mathbb{R})$, o que resultará na realização de uma correspondência entre uma rotação $g \in SO_3(\mathbb{R})$ e um elemento bem determinado do grupo de Möbius de transformações de $\mathbb{C}$. A identificação de um ponto $\mathfrak{n} = (\xi, \eta, \zeta)$ sobre a esfera

$$S^3 = \{\mathfrak{n} \in \mathbb{R}^3 : |\mathfrak{n}|^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$$

com a sua projecção no plano complexo $\mathbb{C}$ através de $\Pi(\mathfrak{n}) = z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$ permite escrever imediatamente uma rotação de γ em torno do eixo $\mathbf{e}_\zeta$ como

$$\mathbf{R}_\zeta(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow z' = e^{i\theta} z \longrightarrow U_\zeta(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$$

Para as rotações em geral verifica-se que

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_\zeta(\gamma) \mathbf{R}_\eta(\beta) \mathbf{R}_\xi(\alpha)$$

onde α, β, γ designam ângulos de Euler. Mas em particular, podemos estabelecer

$$\mathbf{R}_\eta(\beta) = \mathbf{R}_\xi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{R}_\zeta(\beta) \mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

e de forma análoga

$$\mathbf{R}_\xi(\alpha) = \mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{R}_\zeta(\alpha) \mathbf{R}_\eta\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

O efeito destas rotações num elemento genérico $z = \Pi(\mathfrak{n})$ pode-se determinar se conhecermos os correspondentes elementos de $SU_2(\mathbb{R})$ para $\mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Mas iterando $\mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sobre $\mathfrak{n}_0 = -\mathbf{e}_\zeta$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 &= \mathbf{e}_\eta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_1) = i = \frac{b}{d} \\ \mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 &= \mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_2) = \infty = \frac{a i + b}{c i + d} \\ \mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 &= -\mathbf{e}_\eta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_3) = -i = \frac{a}{c} \\ \mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 &= -\mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_4) = 0 = \frac{a(-i) + b}{c(-i) + d} \end{aligned}$$

donde $z' = \frac{z + i}{i z + 1}$ para uma rotação $\mathbf{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Então $U_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$ e consequentemente

$$\mathbf{R}_\eta(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \longrightarrow U_\eta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Assim, uma rotação de θ em torno de $\mathbf{e}_\eta$ traduz-se estereograficamente na transformação de $z \in \mathbb{C}$ em

$$z' = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) z - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Da mesma forma, poderíamos ter começado por determinar $\mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ iterando-o sobre $\mathfrak{n}_0 = -\mathbf{e}_\zeta$,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 &= -\mathbf{e}_\xi \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_1) = -1 = \frac{b}{d} \\ \mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 &= \mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_2) = \infty = \frac{a(-1) + b}{c(-1) + d} \\ \mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 &= \mathbf{e}_\xi \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_3) = 1 = \frac{a}{c} \\ \mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 &= -\mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_4) = 0 = \frac{a + b}{c + d}\end{aligned}$$

donde $z' = \frac{z-1}{z+1}$ para $\mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Obteríamos então

$$U_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e daí que

$$\mathbf{R}_\xi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \rightarrow U_\xi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

e, para uma rotação arbitrária de θ em torno de $\mathbf{e}_\zeta$, a transformação de Möbius correspondente é

$$z' = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)z + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

É possível verificar que, usando as matrizes de Pauli $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ se tem

$$U_\xi(\alpha) = e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_1}, \quad U_\eta(\beta) = e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_2}, \quad U_\zeta(\gamma) = e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_3}$$

Para o caso geral, vemos portanto que

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{R}_\zeta(\gamma)\mathbf{R}_\eta(\beta)\mathbf{R}_\xi(\alpha) \rightarrow U_{\alpha\beta\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \\ -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\frac{\gamma-\alpha}{2}} & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{bmatrix}$$

5.5 Representação induzida por $SU_2(\mathbb{C})$

Para determinar o eixo de rotação precisamos de encontrar P_o que resolve a equação $\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} \cdot P_o = P_o$, o que determina

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\mathbf{e}_\xi + \cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\mathbf{e}_\eta \right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\mathbf{e}_\zeta$$

onde fizemos $\lambda = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2}$. Podemos verificar que o eixo de rotação deve pertencer ao plano ortogonal a $\mathbf{e}_\zeta \times (\mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right) \cdot \mathbf{e}_\eta)$.

Para encontrar a matriz de $SU_2(\mathbb{C})$ que corresponde à rotação $\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\gamma$ é preciso descobrir a matriz

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

que corresponde à transformação de Möbius

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \rightarrow z' = \frac{\xi' + i\eta'}{1 - \zeta'} = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

quando

$$\{\xi, \eta, \zeta\} \rightarrow \{\xi', \eta', \zeta'\} = \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \{\xi, \eta, \zeta\}$$

O resultado é

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha-\gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{\frac{1}{2}i(\alpha-\gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{\frac{1}{2}i(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Isto significa que

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\mathbf{n}\cdot\vec{\sigma}} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \lambda \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-ia - b) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-ia + b) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \lambda \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha-\gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{\frac{1}{2}i(\alpha-\gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{\frac{1}{2}i(\alpha+\gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

onde fizemos $\mathbf{n} = \frac{1}{\lambda} \{a, b, 1\}$ com $\lambda^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 + a^2 + b^2$.

A solução indica que podemos tomar a direcção do eixo de rotação como o vector

$$\mathbf{r} = \left\{ -\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right), \cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right), \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \right\}$$

e ângulo de rotação ϕ tal que e

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \sqrt{1 + \csc^2\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) \tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Conversamente, dada uma direcção

$$\mathbf{n} = \{ \cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\varphi) \}$$

e um ângulo de rotação ϕ , podemos querer obter a correspondente rotação em termos de α, β, γ . Neste caso, temos

$$-e^{-\frac{1}{2}i(\alpha-\gamma)} = i e^{-i\theta} \implies \frac{1}{2}(\alpha-\gamma) = \theta + \frac{\pi}{2}$$

e

$$\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \tan(\varphi)$$

$$\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\phi}{2}\right) \sec(\varphi)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\cos(\varphi) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

5.5.1 Representações Irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$

Para determinar as representações irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$ iremos considerar uma base de polinómios de grau $n = 2j$,

$$\{u^{2j}, u^{2j-1}v, u^{2j-2}v^2, \dots, uv^{2j-1}, v^{2j}\}$$

o que proporciona uma representação de dimensão $d = 2j + 1$. Se pretendemos que a representação seja unitária convém normalizar esta base e usar

$$f_m = \frac{u^{j+m} v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$$

com $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$.

$$\text{No caso } j = \frac{1}{2} \text{ temos } \begin{cases} f_{-1/2} = v \\ f_{1/2} = u \end{cases} \text{ donde } \mathcal{D}_{ab}^{(1/2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

$$\text{No caso } j = 1 \text{ temos } \begin{cases} f_{-1} = v^2 \\ f_0 = uv \\ f_1 = u^2 \end{cases} \text{ donde } \mathcal{D}_{ab}^{(1)} = R_{\alpha\beta\gamma} \text{ com } \begin{cases} a = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ b = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \end{cases}.$$

Em geral

$$\mathcal{D}_{ab}^{(j)} f_m = c_{jm} (au + bv)^{j+m} (-\bar{b}u + \bar{a}v)^{j-m} = \sum_{m'=-j}^j \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(a, b) f_{m'}$$

$$\text{onde } c_{jm} = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}} \text{ e}$$

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(a, b) = \sum_{m'=-j}^j \frac{1}{c_{jm} c_{jm'}} \frac{a^{j+m-\mu} b^{\mu} \bar{a}^{j-m'-\mu} (-\bar{b})^{m'-m+\mu}}{(j+m-\mu)!\mu!(j-m'-\mu)!(m'-m+\mu)!}$$

Mostra-se que $\sum_{m=-j}^j |f_m|^2 = \frac{1}{(2j)!} (|u|^2 + |v|^2)^{2j}$ é invariante para estas transformações de $SU_2(\mathbb{C})$.

O **CARACTER** da representação irredutível (j) é simplesmente:

$$\chi^{(j)}(\phi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\phi} = \frac{\sin\left(\frac{(2j+1)\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Para j integral, as matrizes

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}}\right)$$

determinam uma representação irredutível de $SO_3(\mathbb{R})$.

5.5.2 Raízes e Forma Canónica de Relações de Comutação

As propriedades de uma álgebra de Lie ficam completamente determinadas pelas suas constantes de estrutura c_{ij}^k . Uma mudança de base $\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}_i' = \mathbf{A} \cdot \mathbb{E}_i$ é acompanhada por uma correspondente transformação das constantes de estrutura

$$c_{ij}^k \rightarrow c_{ij}^{\prime k} = A_i^r A_j^s A_u^{-1k} c_{rs}^u$$

Podemos escrever o tensor

$$\mathfrak{S} = c_{ij}^k \mathbb{E}^i \otimes \mathbb{E}_k \otimes \mathbb{E}^j = \mathbb{E}^i \otimes \mathbf{a} \mathbf{d}_{\mathbb{E}_i}$$

em termos da representação regular

$$\text{ad}_{\mathbb{E}_i} = c_{ij}^k \mathbb{E}_k \otimes \mathbb{E}^j$$

e então $\mathbb{E}_i \cdot \mathbb{E}_j = [\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_j] = c_{ij}^k \mathbb{E}_k$.

A procura de uma forma canónica para as relações de comutação de uma álgebra de Lie reduz-se ao problema de escrever as matrizes $\text{ad}_{\mathbb{E}_i}$ na sua **forma de Jordan canónica**, i.e. bloco-diagonal com blocos de **Jordan** de ordem k , como

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$$

o que se atinge resolvendo a equação secular $\det[\text{ad}_{\mathbb{E}_i} - \lambda \mathbb{I}] = 0$ e construindo a matriz de mudança de base com os vectores próprios. Toda a teoria de **RAÍZES** de álgebras de Lie é dedicada a este problema classificativo.

A representação **REGULAR** $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{AUT}[\mathfrak{g}]$ não é fiel em geral, mas consegue distinguir álgebras de Lie diferentes. A presença de sub-álgebras invariantes indica a redutibilidade da representação regular. Um mecanismo para construir sub-álgebras invariantes é a derivação sucessiva

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{(1)}, [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \mathfrak{g}^{(2)} \dots [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}] = \mathfrak{g}^{(n)}$$

Para álgebras de dimensão finita, a partir de um dado n tem-se necessariamente

$$\mathfrak{g}^{(n-1)} \neq \mathfrak{g}^{(n)} = \mathfrak{g}^{(n+1)} = \dots$$

Se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ a álgebra diz-se **resolúvel**. O **radical** da álgebra $\mathfrak{g}$ é a sub-álgebra resolúvel máxima de $\mathfrak{g}$.

5.5.3 Constantes de Estrutura e Representação Regular de álgebra

Uma forma de Killing é uma forma bilinear sobre uma álgebra de Lie definida através da sua representação regular por

$$g(A, B) = \langle A, B \rangle = \text{Tr}[\text{ad}_A, \text{ad}_B]$$

De facto dado

$$\mathbb{X} = X^i A_i = X^i (A_i)_k^j e_j \otimes e^k \quad \text{e} \quad A = \alpha_r (A^r)_s^t e_t \otimes e^s$$

com

$$A^r \cdot A_i = (A^r)_s^t (A_i)_k^j \delta_t^s \delta_j^k = (A^r)_s^k (A_i)_k^s = \text{Tr}[A^r A_i] = \delta_i^r$$

por isso

$$\alpha(\mathbb{X}) = X^i (A_i)_k^j \alpha_r (A^r)_s^t \delta_j^s \delta_t^k = X^i (A_i)_t^s \alpha_r (A^r)_s^t = (\mathbb{X})_t^s (\alpha)_s^t = \text{Tr}[\mathbb{X} A]$$

5.6 Medida Invariante Sobre um Grupo

[Espaços de Medida]

DEFINIÇÃO [5.7]

Um **ESPAÇO DE BOREL** é um conjunto S dotado de uma família distinta $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos $\mathcal{B}_\alpha \subset S$ que é **FECHADA** para as operações de:

IV.7 - i. **COMPLEMENTO** $\mathcal{B}_\alpha^c \subset \mathcal{B}$.

IV.7 - ii. **UNIÃO NUMERÁVEL** $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i\right) \subset \mathcal{B}$.

IV.7 - iii. **INTERSECÇÃO NUMERÁVEL** $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i\right) \subset \mathcal{B}$.

DEFINIÇÃO [5.8]

Uma **MEDIDA** μ sobre um espaço de Borel S é uma função positiva, σ -aditiva, definida em todos os conjuntos de Borel, i.e. uma função que verifica:

IV.8 - i. Sempre que, para $\forall i, j$, se tenha $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, então $\mu\left(\bigcup_i \mathcal{B}_i\right) = \sum_i \mu(\mathcal{B}_i)$.

IV.8 - ii. Existe uma colecção $\{\mathcal{B}_i\}$ para os quais $\mu(\mathcal{B}_i) < \infty$ e $S = \bigcup_i \mathcal{B}_i$.

- Duas medidas μ e ν que possuam os **MESMOS CONJUNTOS DE MEDIDA ZERO** dizem-se da mesma **CLASSE DE MEDIDA**. Neste caso, as derivadas de **RADON-NIKODIM** $\frac{d\mu}{d\nu}$ e $\frac{d\nu}{d\mu}$ existem ambas. No caso de S ser **NUMERÁVEL**, duas medidas pertencem à mesma **CLASSE DE MEDIDA** se e só se forem positivas nos mesmos pontos.

[Medida de Haar]

DEFINIÇÃO [5.9]

Uma medida $\mu \neq 0$ num grupo G que, para qualquer boreliano $\mathcal{B} \subset G$ e para todo o $g \in G$, verifique $\mu(g\mathcal{B}) = \mu(\mathcal{B})$ diz-se **MEDIDA DE HAAR SEMI-INVARIANTE À ESQUERDA**. (respectivamente **À DIREITA** se $\mu(\mathcal{B}g) = \mu(\mathcal{B})$).

- Um grupo **UNIMODULAR** é um grupo onde existe uma medida de Haar simultaneamente semi-invariante à esquerda e à direita. Qualquer grupo **COMPACTO** G é **UNIMODULAR**, i.e. as medidas de Haar invariantes à esquerda são também invariantes à direita, e todas as medidas de Haar verificam $\mu(G) < \infty$.
- Uma medida de Haar existe e é **ÚNICA** se G for **LOCALMENTE COMPACTO e SEPARÁVEL** mas se G além disso for **NÃO-COMPACTO**, $\mu(G) = \infty$ para qualquer medida de Haar (que não são necessariamente invariantes).

EXEMPLOS

- I. Medida de Haar num grupo discreto: $\mu(\mathcal{B}) = \lambda \# |\mathcal{B}|$.
- II. Medida de Haar em $\mathbb{R}$: $\mu([a, b]) = \lambda(b - a)$ $d\mu(g) = dx$.
- III. Medida de Haar em $G = \left\{ g = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$: $d\mu(g) = \frac{1}{x^2} dx dy$.
- IV. Medida de Haar em $G = GL_n(\mathbb{R})$: $d\mu(g) = \frac{1}{\det(g)^n} dx^{11} \dots dx^{nn}$.
- V. Medida de Haar em $SU(2)$ (o recobrimento universal de $SO(3)$).

$$SU(2) = \left\{ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Como α e β são complexos, $SU(2)$ é a esfera $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, que é simplesmente conexa e **COMPACTA**. $SU(2)$ é portanto um grupo **UNIMODULAR** e tem uma medida de Haar invariante finita.

Os elementos de $SU(2)$ podem ser parametrizados pelo ângulo de rotação θ em torno de um eixo $\mathbf{n}(\alpha, \beta) = \{ \sin(\beta) \cos(\alpha), \sin(\beta) \sin(\alpha), \cos(\beta) \}$, pelo que obtemos uma representação spinorial usando

$$\mathbf{U} = e^{-i \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{1} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^i \mathbf{e}_i$, com σ^i as matrizes de Pauli, $\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Formas invariantes são obtidas das entradas da matriz $\mathbf{U}^{-1} d\mathbf{U}$ ou $(d\mathbf{U})\mathbf{U}^{-1}$, e o seu produto externo dá a medida de Haar

$$d\mu(\alpha, \beta, \theta) = 4 \sin(\beta) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\alpha d\beta d\theta$$

5.7 Representações de Grupos Infinitos

[Teorema de Peter-Weyl]

TEOREMA [5.10]

- IV.10 - i. A **REPRESENTAÇÃO REGULAR** de qualquer grupo **COMPACTO** e separável G pode decompor-se numa **SOMA DIRECTA** de representações irredutíveis de **DIMENSÃO FINITA**.
- IV.10 - ii. Cada representação irredutível aparece com uma **MULTIPLICIDADE FINITA** igual à dimensão da representação.
- IV.10 - iii. **TODAS** as representações irredutíveis aparecem na decomposição.
- IV.10 - iv. Como $\mathcal{L}^2(G, \mu)$ é **SEPARÁVEL**, o conjunto de representações irredutíveis inequivalentes é **NUMERÁVEL**.

No caso de grupo não compactos, essencialmente por não existir uma **MEDIDA INVARIANTE E FINITA**:

- Existem representações **REDUTÍVEIS** que não são **COMPLETAMENTE REDUTÍVEIS**.
- Existem representações unitárias irredutíveis de **DIMENSÃO INFINITA**.
- Muitos grupos só têm a representação trivial de dimensão finita.
- $\text{TR}[\mathbf{U}]$ não tem significado em representações de dimensão infinita, pelo que a definição de caracteres deve ser feita de outra forma.

[Dualidade de Grupos]

O **GRUPO DUAL** $\hat{G}$ de um grupo G é o grupo **ABELIANO** formado pelos **CARACTERES** de G , sendo a operação de grupo a multiplicação de caracteres. Pode-se desde já adiantar que¹

[Teorema de Pontryagin]

TEOREMA [5.11]

Se G é um grupo **ABELIANO** localmente compacto, cada elemento $g \in G$ define um caracter $\hat{g} \in \hat{G}$ de $\hat{G}$,

$$\hat{g}(\chi) = \chi(g), \quad \forall \chi \in \hat{G}$$

e **TODOS OS CARACTERES** de $\hat{G}$ são desta forma, pelo que G é **TOPOLOGICAMENTE ISOMORFO** a $\hat{\hat{G}}$.

COROLÁRIO [5.12]

Se G é um grupo **ABELIANO** localmente compacto, os caracteres de G **SEPARAM** os pontos de G .

DEMONSTRAÇÃO

Se $\chi(g) = \chi(g'), \forall \chi \in \hat{G}$, então $\hat{g} = \hat{g}' \iff g = g'$ pelo isomorfismo $G \simeq \hat{\hat{G}}$. ■

¹ - Hewitt & Ross: *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag (1963) S 24.

TEOREMA [5.13]

Para G um grupo **ABELIANO NÃO-COMPACTO**, localmente compacto, a **TRANSFORMADA GENERALIZADA DE FOURIER** de $\Psi \in \mathcal{L}^2(G, \mu) \cap \mathcal{L}^1(G, \mu)$ define-se por

$$\hat{\Psi}(\chi) = \int_G \Psi(g) \bar{\chi}(g) d\mu(g)$$

Então:

IV.13 - i. Existe uma única medida de Haar $\hat{\mu}$ em $\hat{G}$ (designada **MEDIDA DE PLANCHEREL**) tal que $\|\Psi\|_G^2 = \|\hat{\Psi}\|_{\hat{G}}^2$, i.e.

$$\int_G |\Psi(g)|^2 d\mu(g) = \int_{\hat{G}} |\hat{\Psi}(\chi)|^2 d\hat{\mu}(\chi)$$

IV.13 - ii. A correspondência $\Psi \rightarrow \hat{\Psi}$ tem uma extensão única para uma **APLICAÇÃO UNITÁRIA** de $\mathcal{L}^2(G, \mu)$ para $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$.

POR EXEMPLO: Um exemplo de grupo numerável comutativo é o grupo cíclico infinito, i.e. o grupo aditivo dos inteiros $G = (\mathbb{Z}, +)$. De $\chi(n) = \chi(1)^n$ resulta que $\hat{G} = \mathbb{S}^1 = \{\chi_x(n) = e^{2\pi i n x}, x \in \mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)\}$.

- Um exemplo simples de um grupo localmente compacto comutativo que não é discreto nem compacto é o grupo aditivo real $G = (\mathbb{R}, +)$. Neste caso $\hat{G} \simeq G$ porque os caracteres são todos do tipo $x \rightarrow \chi(x) = e^{i xy}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$.
- Se $G = V \simeq (\mathbb{R}^n, +)$ é o grupo aditivo de qualquer espaço vectorial real de dimensão finita V , os caracteres são da forma $\chi_\alpha(\mathbf{x}) = e^{i \alpha(\mathbf{x})}, \quad \forall \alpha \in V^*$. Neste caso $\hat{G} = V^*$ é mesmo o dual (como espaço vectorial) de G .
- É possível mostrar que qualquer grupo **ABELIANO** localmente compacto é de forma única um produto directo dum grupo vectorial de dimensão finita e um grupo $\tilde{G}$ possuindo um subgrupo **COMPACTO** H cujo quociente $\frac{\tilde{G}}{H}$ é **FINITO**.

Para grupos

FINITOS: O dual de um grupo **FINITO** G é um grupo **ABELIANO FINITO**, de ordem $\#|\hat{G}| \leq \#|G|$, relativamente ao produto $(\chi\chi')(g) = (\chi'\chi)(g) = \chi(g)\chi'(g), \forall g \in G$.

- O número de caracteres em $\hat{G}$ é igual ao número de classes de conjugação em G e ao número de representações irredutíveis inequivalentes.

& ABELIANOS: Qualquer grupo **ABELIANO FINITO** G é isomorfo ao seu dual: $G \simeq \hat{G}$.

COMPACTOS: Devido à correspondência entre representações irredutíveis de um grupo compacto G e os seus caracteres (Peter-Weyl), o dual $\hat{G}$ de um grupo separável e compacto G é **ABELIANO NUMERÁVEL**. Dada uma representação redutível $\mathbf{U} : G \rightarrow \mathcal{H}$ de um grupo **COMPACTO** é possível decompor o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ em **PRIMÁRIOS DISJUNTOS** $\mathcal{H}_{\chi}^{(i)}$ que vêm associados a cada carácter $\chi \in \hat{G}$ de uma representação irredutível de dimensão d_i . De facto, pode-se construir um operador de projecção $\mathbf{P}_{\chi}^{(i)} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\chi}^{(i)}$

$$\mathbf{P}_{\chi}^{(i)} = \frac{d_i}{\mu(G)} \int_G \bar{\chi}(g) \mathbf{U}_g^{(i)} d\mu(g)$$

- Os $\mathcal{H}_{\chi}^{(i)}$ são sub-espacos invariantes de $\mathcal{H}$, mutuamente ortogonais.
- A subrepresentação definida por $\mathbf{U}$ restrito a $\mathcal{H}_{\chi}^{(i)}$ é uma **SOMA DIRECTA** de cópias equivalentes da mesma representação irredutível $\mathbf{U}^{(i)}$.

& ABELIANOS: Qualquer grupo separável, **ABELIANO COMPACTO** pode ser obtido como o dual dum grupo **ABELIANO NUMERÁVEL** (pelo teorema de dualidade de Pontriagyn, $G \simeq \hat{\hat{G}}$). Em consequência do teorema de Peter-Weyl, os caracteres $\chi \in \hat{G}$ são mutuamente ortogonais e formam um **SISTEMA COMPLETO** em $\mathcal{L}^2(G)$, i.e. toda a função $\Psi \in \mathcal{L}^2(G)$ se decompõe de forma única num somatório

$$\Psi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} C_{\chi} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} C_{\chi} \hat{g}(\chi)$$

A função $\hat{\Psi}(\chi) = C_{\chi}$ designa-se a **TRANSFORMADA DE FOURIER** de Ψ .

Se $\hat{\mu}$ designar a medida discreta em qualquer grupo **ABELIANO NUMERÁVEL** $\hat{G}$, $\hat{\mu}$ é uma medida de Haar e podemos escrever a correspondência unitária entre $\hat{\Psi} \in \mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$ e a sua transformada de Fourier como

$$\Psi(g) = \int_{\hat{G}} \hat{\Psi}(\chi) \hat{g}(\chi) d\hat{\mu}(\chi) \in \mathcal{L}^2(G, \mu)$$

NÃO-COMPACTOS: ?

& ABELIANOS: Recíprocamente, dado o isomorfismo entre G e $\hat{\hat{G}}$, o dual $\hat{G}$ dum grupo **ABELIANO NÃO-COMPACTO** só pode ser um grupo igualmente **ABELIANO NÃO-COMPACTO**.

5.8 Decomposição de Mackey

[Teorema de Mackey]

TEOREMA [5.14]

Seja G um grupo separável, localmente compacto, e K um subgrupo fechado de G .
Então:

IV.14 - i. Existe um boreliano $S \subset G$ tal que, para **TODO** o $g \in G$, é **ÚNICA** a decomposição de g na forma

$$g = ks \quad ; \quad k \in K, \quad s \in S$$

EXEMPLO

$$G \sim SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \text{DET}(\mathbf{B}) = 1 \right\}$$

Vamos usar o subgrupo K

$$K = \left\{ \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda \neq 0 \right\}$$

K é um subgrupo fechado de $SL_2(\mathbb{R})$. Então, tendo em conta que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (\delta \neq 0) : & \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} ; & \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\delta^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ (\delta = 0) : & \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} ; & \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$S \sim \left\{ \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} ; \nu \in \mathbb{R} \right\}$ quase sempre (O conjunto dos $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tem medida nula.)

S é um dos subgrupos notáveis de G por ser um subgrupo **NILPOTENTE** maximal de G .

5.9 Medidas c/valor Projecção

DEFINIÇÃO [5.15]

Uma **MEDIDA C/VALOR PROJECCÃO DE** $\mathcal{H}$ sobre um espaço de Borel S é uma função $\mathbf{P} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ definida sobre os Borelianos $\mathcal{B} \subset S$ tal que:

IV.15 - i. $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ são **OPERADORES DE PROJECCÃO** num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

IV.15 - ii. $\mathbf{P}_S = \mathbf{I}$ e $\mathbf{P}_{\emptyset} = 0$.

IV.15 - iii. $\mathbf{P}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}} \mathbf{P}_{\mathcal{B}'}$ ($\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathcal{B}_S$).

IV.15 - iv. $\mathbf{P}_{\bigcup_i \mathcal{B}_i} = \sum_i \mathbf{P}_{\mathcal{B}_i}$ (se $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, $\forall i, j$).

DEFINIÇÃO [5.16]

Uma **MEDIDA ESPECTRAL** é uma aplicação $\mathbf{P} : \hat{\mathcal{B}}_{\hat{G}} \rightarrow \Pi_{\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})}$ do espaço dos Borelianos $\hat{\mathcal{B}} \subset \hat{G}$ para o espaço $\Pi_{\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})}$ das **PROJECCÕES** $\mathbf{P}_{\hat{\mathcal{B}}}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$ definida por

$$(\mathbf{P}_{\hat{\mathcal{B}}} \hat{\Psi})(\chi) \doteq \zeta_{\hat{\mathcal{B}}}(\chi) \Psi(\chi)$$

onde $\zeta_{\hat{\mathcal{B}}} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ é a **FUNÇÃO CARACTERÍSTICA** dum conjunto $\hat{\mathcal{B}}$.

[Teorema Espectral para Grupos Abelianos]

TEOREMA [5.17]

Para qualquer representação unitária $\mathbf{U}$ dum grupo separável, localmente compacto G , existe no dual $\hat{G}$ uma única **MEDIDA C/VALOR PROJECCÃO** $\mathbf{P}$ tal que

$$\langle \mathbf{U}(g)\Psi, \Psi \rangle = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\chi) d\langle \mathbf{P}_{\chi} \Psi, \Psi \rangle \quad (\forall \Psi \in \mathcal{H}^G)$$

Toda a Medida c/valor Projecção $\mathbf{P}$ se obtém assim duma única representação unitária $\mathbf{U}$ de G .

A DETERMINAÇÃO DE **REPRESENTAÇÕES UNITÁRIAS** DE G É ASSIM EQUIVALENTE
À DETERMINAÇÃO DE **MEDIDAS C/VALOR PROJECCÃO** EM $\hat{G}$.

- Quando G é **ABELIANO COMPACTO**, $\hat{G}$ é **ABELIANO NUMERÁVEL** e na topologia discreta cada $\{\chi\}$ é um Boreliano. As medidas c/valor projecção constroem-se a partir da identidade

$$P_{\mathcal{B}} = \sum_{\chi \in \mathcal{B}} P_{\{\chi\}} \text{ onde}$$

$$P_{\{\chi\}} = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \bar{\chi}(g) U_g d\mu(g)$$

- Quando $G \simeq (\mathbb{R}, +)$, isto equivale ao Teorema Espectral para operadores Auto-Adjuntos.

EXEMPLO

A **REPRESENTAÇÃO REGULAR** de $\hat{G}$ é a representação no espaço $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$

$$(5-2) \quad (\hat{R}_{\chi} \hat{\Psi})(\chi') = \hat{\Psi}(\chi' \chi)$$

Dada a correspondência unitária entre $\hat{\Psi} \in \mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$ e a sua **TRANSFORMADA DE FOURIER**

$$(5-3) \quad \Psi(g) = \int_{\hat{G}} \hat{\Psi}(\chi) \hat{g}(\chi) d\hat{\mu}(\chi) \in \mathcal{L}^2(G, \mu)$$

a representação regular (5-2) é equivalente à representação de $\hat{G}$ em $\mathcal{L}^2(G, \mu)$

$$(\mathbf{L}_{\chi} \Psi)(g) = \int_{\hat{G}} (\hat{R}_{\chi} \hat{\Psi})(\chi') \hat{g}(\chi') d\hat{\mu}(\chi') = \int_{\hat{G}} \hat{\Psi}(\chi' \chi) \hat{g}(\chi') d\hat{\mu}(\chi') = \bar{\chi}(g) \Psi(g)$$

Recíprocamente, a representação regular de G em $\mathcal{L}^2(G, \mu)$ é equivalente, pela Transformada de Fourier, à representação de G em $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$

$$(\mathbf{L}_g \hat{\Psi})(\chi) = \hat{g}(\chi) \hat{\Psi}(\chi) = \chi(g) \hat{\Psi}(\chi)$$

5.10 Representações Induzidas

DEFINIÇÃO [5.18]

Dada uma acção de um grupo G num espaço de Borel S possuindo uma medida invariante μ , se **NÃO EXISTIR** um boreliano G -invariante $\mathcal{B} \subset S$ tal que

$$\mu(\mathcal{B}) \neq 0 \quad ; \quad \mu(S - \mathcal{B}) \neq 0$$

então a acção e a medida invariante μ dizem-se **ERGÓDICAS** ou **MÉTRICAMENTE TRANSITIVAS**.

- Uma acção **TRANSITIVA** é sempre **ERGÓDICA** porque não existem outros sub-espacos invariantes excepto $\emptyset$ e S .
- Nem todas as acções **ERGÓDICAS** são **TRANSITIVAS** : existem acções ergódicas para as quais todas as órbitas têm medida nula.
- Um **FIBRADO HILBERTIANO** sobre S é uma correspondência $\mathcal{H} : s \mapsto \mathcal{H}_s$ de um espaço hilbertiano separável $\mathcal{H}_s$ a cada $s \in S$. O espaço do fibrado denota-se ${}_S\mathcal{H}^\pi$ onde $\pi({}_S\mathcal{H}^\pi) \sim S$ é o **ESPAÇO BASE** e $\pi^{-1}(s) = \mathcal{H}_s$ as **FIBRAS**.

DEFINIÇÃO [5.19]

Dada uma acção $(g, s) \mapsto s_g$ de um grupo L.C. SEPARÁVEL G num espaço de Borel S com medida invariante μ , designa-se por **REPRESENTAÇÃO REGULAR** a uma representação unitária $\mathbf{U} : G \rightarrow \text{AUT}(\mathcal{L}^2(S, \mu))$ que é sempre possível de construir definindo,

$$(\mathbf{U}_g \Psi)(s) = \Psi(s_g)$$

A construção de representações induzidas é uma generalização deste princípio, em que $\mathcal{L}^2(S, \mu)$ é substituído por $\mathcal{L}^2({}_S\mathcal{H}^\pi, \mu)$ onde ${}_S\mathcal{H}^\pi$ é um fibrado hilbertiano sobre S onde G AGE TRANSITIVAMENTE através de

$$(g, s\Psi) \mapsto ({}_s\Psi)_g \doteq \mathbf{L}_{g^{-1}}^s({}_s\Psi) \equiv {}_{s_g}\Psi; \quad \mathbf{L}_{g^{-1}}^s \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s_g})$$

Neste caso, se $\Psi : s \rightarrow {}_s\Psi \in \mathcal{H}_s$ for uma **SECÇÃO** de ${}_S\mathcal{H}^\pi$, a **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** pela acção de G em ${}_S\mathcal{H}^\pi$ é

$$\mathbf{U}_g({}_s\Psi) = \mathbf{L}_g^{s_g}({}_{s_g}\Psi)$$

onde $\mathbf{L}_g^s$ designa a acção de G em cada $\mathcal{H}_s$. Esta representação é unitária no conjunto $\mathcal{L}^2({}_S\mathcal{H}^\pi, \mu)$ das secções de quadrado somável

$$\Psi \in \mathcal{L}^2({}_S\mathcal{H}^\pi, \mu) \iff \int_S \|{}_s\Psi\|^2 d\mu(s) < \infty$$

Suponhamos agora que a acção de G em S é **TRANSITIVA**. Seja $s_o \in S$ um ponto qualquer e K_{s_o} o seu subgrupo de estacionaridade

$$K_{s_o} = \{k \in G : (s_o)_k = s_o\}$$

Para cada $k \in K_{s_o}$,

$$({}_{s_o}\Psi)_k = \mathbf{L}_{k^{-1}}^{s_o}({}_{s_o}\Psi); \quad \mathbf{L}_{k^{-1}}^{s_o} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_{s_o}, \mathcal{H}_{s_o}), \quad \forall k \in K_{s_o}$$

i.e. $\mathbf{L}^{s_o}$ É UMA REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA de K_{s_o} .

- Todo o G -fibrado hilbertiano sobre um G -espaço de Borel transitivo S está associado a uma representação unitária $\mathbf{L}^{s_o}$ de um subgrupo K_{s_o} .
- O problema de encontrar G -fibrados hilbertianos sobre um G -espaço de Borel transitivo S é completamente equivalente ao problema de encontrar a mais geral representação unitária $\mathbf{L}^{s_o}$ de um subgrupo K_{s_o} .

- No caso de G -espaços transitivos S , se existir uma medida μ esta medida invariante é **ÚNICA** a menos de uma constante. Mudando a constante **NÃO MUDA** a classe de equivalência das representações induzidas.

DADO UM G -ESPAÇO TRANSITIVO S COM MEDIDA INVARIANTE μ , EXISTE UMA BEM DEFINIDA (CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DE) REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA INDUZIDA DE G PARA CADA (CLASSE DE EQUIVALÊNCIA DE) REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA DE K_{s_0} .

Dada a acção de G em S .

$$(s_0)_g = (s_0)_{g'} \iff g'g^{-1} \in K_{s_0} \implies K_{s_0}g = K_{s_0}g'$$

ou seja, existe uma correspondência bi-unívoca entre os co-conjuntos $[g] = K_{s_0}g$ e pontos $s = (s_0)_g \in S$

$$S \longleftrightarrow K_{s_0} \backslash G$$

Esta correspondência permite definir uma estrutura de espaço de Borel e uma medida invariante $\tilde{\mu}$ em $K_{s_0} \backslash G$ através de

$$d\tilde{\mu}([g]) = d\mu(s_0g)$$

Seja dada uma **REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA** $\mathbf{U}^K : K = K_{s_0} \rightarrow \mathcal{H}^K$. Considere-se o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}^G = \left\{ \Psi : G \rightarrow \mathcal{H}^K : \Psi(kg) = \mathbf{U}_k^K(\Psi(g)) \text{ \& } \int_{K_{s_0} \backslash G} \|\Psi(g)\|_{\mathcal{H}^K}^2 d\tilde{\mu}([g]) < \infty; \quad \forall k \in K, \quad g \in G \right\}$$

- O espaço $\mathcal{H}^G$ é invariante para translações à direita:

$$(\mathbf{R}_g \Psi)(g') = \Psi(g'g) \Rightarrow (\mathbf{R}_g \Psi)(kg') = \Psi(kg'g) = \mathbf{U}_k^K(\Psi(g'g)) \iff \mathbf{R}_g \Psi \in \mathcal{H}^G$$

- $\|\Psi(g)\|_{\mathcal{H}^K}^2$ é constante em cada co-conjunto $[g] = Kg$.

DEFINIÇÃO [5.20]

A **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** $\mathbf{U}^{G(K)} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}^G)$ de G por $\mathbf{U}^K$ é a representação unitária

$$\left(\mathbf{U}_g^{G(K)} \Psi \right)(g') = \Psi(g'g); \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}^G, \quad g \in G$$

Vamos definir a representação induzida de G directamente no espaço de funções $\mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$, onde $S \simeq K \backslash G$, da seguinte forma.

Seja $\mathbf{T} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}^K)$ uma **FUNÇÃO OPERATORIAL** que verifique

- $\mathbf{T}_{kg} = \mathbf{U}_k^K \mathbf{T}_g$;
- $\langle \mathbf{T}_g \psi, \psi' \rangle$ é mensurável para a medida de Haar em G , para todos os pares $\psi, \psi' \in \mathcal{H}^K$ (i.e. $\mathbf{T}$ é fracamente mensurável).

$\mathbf{T}$ não é necessariamente uma representação, embora $\mathbf{T}_g = \mathbf{U}_{k_g}^K$ seja uma possibilidade, onde $g = k_g s_g$ é a decomposição de Mackey associada à identificação $S \simeq K \backslash G$.

Para cada função $\Phi \in \mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$ existe um $\Psi \in \mathcal{H}^G$ determinado por

$$\Psi(g) = \mathbf{T}_{g_s}(\Phi(s_g))$$

onde s_g e g se relacionam pela decomposição de Mackey única $g = k_g s_g$. Recíprocamente, para cada $\Psi \in \mathcal{H}^G$ pode associar-se uma função $\Phi \in \mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$ determinada em $g \in G$ e

$$\Phi(s) = \mathbf{T}_{g_s}^{-1} \Psi(g_s)$$

onde g_s se obtém de s por $g_s = ks$, $\forall k \in K$. Esta definição não depende da escolha de k porque, se $g'_s = k's = k'k^{-1}g_s$,

$$\Phi(s) = \mathbf{T}_{g'_s}^{-1} \Psi(g'_s) = \left(\mathbf{U}_{k'k^{-1}}^K \mathbf{T}_{g_s} \right)^{-1} \mathbf{U}_{k'k^{-1}}^K \Psi(g_s) = \mathbf{T}_{g_s}^{-1} \Psi(g_s)$$

Definindo $\tilde{\mathbf{U}}^{G(K)} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K))$ através de

$$(\mathbf{U}_g^{G(K)} \Psi)(g) = \mathbf{T}_g \left(\tilde{\mathbf{U}}_{g'}^{G(K)} \Phi \right) (s_g)$$

obtemos a

DEFINIÇÃO [5.21]

A expressão da **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** de G por $\mathbf{U}^K$ por operadores unitários em $\mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$ é dada por

$$\left(\tilde{\mathbf{U}}_{g'}^{G(K)} \Phi \right) (s) = \mathbf{T}_{g_s}^{-1} \mathbf{T}_{g_s g'} (\Phi(sg'))$$

Existe sempre pelo menos uma medida **QUASI-INVARIANTE** em $K \backslash G$ (μ e $\mu_g : \mathcal{B} \rightarrow \mu(\mathcal{B}g)$ equivalentes). No caso de $S \simeq K \backslash G$ apenas ter medida quasi-invariante, para preservar a unitariedade de $\mathbf{U}^{G(K)}$ deve-se alterar a definição anterior para

$$(\mathbf{U}_g^{G(K)} \Psi)(g') = \sqrt{\rho_g(g')} \Psi(g'g)$$

onde $\rho_g = \frac{d\mu_g}{d\mu}$ é a derivada de **RADON-NIKODYM** de μ_g relativamente a μ .

A representação induzida $\mathbf{U}^{G(K)}$ é independente da medida quasi-invariante escolhida.

TEOREMA DE RECIPROCIDADE DE FROBENIUS

Dada uma representação **UNITÁRIA IRREDUTÍVEL** $\mathbf{U}^K$ dum subgrupo fechado K do grupo separável **COMPACTO** G , a multiplicidade com que uma qualquer representação **UNITÁRIA IRREDUTÍVEL** $\mathbf{U}^{(i)}$ de G aparece na decomposição da **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** $\mathbf{U}^{G(K)}$ é exactamente igual à multiplicidade com que $\mathbf{U}^K$ aparece na decomposição da restrição de $\mathbf{U}^{(i)}$ a K .

5.11 Sistemas de Imprimitividade

Dado um subgrupo fechado K dum grupo G localmente compacto e separável, seja:

IV.21 - i. $S \simeq K \backslash G$ um Boreliano de G tal que, para **TODO** o $g \in G$, existe uma decomposição **ÚNICA** de g na forma

$$g = k_g s_g; \quad k_g \in K, \quad s_g \in S$$

IV.21 - ii. $\mathbf{U}^K : K \rightarrow \mathcal{H}^K$ uma **REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA** de K em $\mathcal{H}^K$.

IV.21 - iii. $\mathbf{U}^{G(K)} : G \rightarrow \mathcal{H}^G$ a representação de G **INDUZIDA** por K .

IV.21 - iv. $\mathcal{B} \subset S$ um sub-conjunto Boreliano de S e $\zeta_{\mathcal{B}} : S \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ a função característica do conjunto $\mathcal{B}$.

DEFINIÇÃO [5.22]

Seja $\mathbf{P} : \text{Borel}(S) \rightarrow \Pi(\mathcal{H}^G)$ a **MEDIDA ESPECTRAL** definida por

$$(\mathbf{P}_{\mathcal{B}}\Psi)(g) \doteq \zeta_{\mathcal{B}}(s_g)\Psi(g), \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}^G$$

A Medida Espectral $\mathbf{P}$ é uma **MEDIDA C/VALOR PROJEÇÃO** que verifica

$$(\mathbf{P}_{\mathcal{B}}\Psi)(kg) = (\mathbf{U}_k^K \mathbf{P}_{\mathcal{B}}\Psi)(g), \quad \forall k \in K, \Psi \in \mathcal{H}^G$$

e associa a $\mathbf{U}^{G(K)}$ um **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE TRANSITIVO**

$$\mathbf{U}_g^{G(K)} \mathbf{P}_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{g^{-1}}^{G(K)} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}g^{-1}}$$

NB: O termo **TRANSITIVO** indica que existem suficientes geradores em G para formar um sistema conjugado de operadores de **POSIÇÃO Q**, para os quais $\mathbf{P}$ forma a medida espectral.

- A toda a representação **INDUZIDA** é possível associar um **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE**, e reciprocamente, uma representação unitária que possua um Sistema de Imprimitividade Transitivo é unitariamente equivalente a uma representação Induzida.

DEMONSTRAÇÃO

$\mathbf{P}$ transforma-se da seguinte forma para a representação induzida $\mathbf{U}^{G(K)}$

$$(\mathbf{U}_g^{G(K)} \mathbf{P}_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{g^{-1}}^{G(K)} \Psi)(g') = (\mathbf{P}_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{g^{-1}}^{G(K)} \Psi)(g'g) = \zeta_{\mathcal{B}}(s_{g'}g)(\mathbf{U}_{g^{-1}}^{G(K)} \Psi)(g'g) = \zeta_{\mathcal{B}}(s_{g'}g)\Psi(g') = (\mathbf{P}_{\mathcal{B}g^{-1}}\Psi)(g')$$

porque $s_{g'}g \in \mathcal{B} \iff s_{g'} \in \mathcal{B}g^{-1}$. Verificamos portanto que $\mathbf{U}_g^{G(K)} \mathbf{P}_{\mathcal{B}} \mathbf{U}_{g^{-1}}^{G(K)} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}g^{-1}}$ é um **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE TRANSITIVO**. ■

5.12 Produtos Semi-directos

DEFINIÇÃO [5.23]

Um grupo separável localmente compacto (s.l.c.) G diz-se o **PRODUTO SEMI-DIRECTO** do subgrupo normal fechado N e o subgrupo fechado H (e escreve-se $G = N \rtimes H$) se qualquer $g \in G$ se decompuser de **FORMA ÚNICA** num produto $g = nh$, com $n \in N$, $h \in H$.

- Se $G = N \rtimes H \implies N \cap H = \{e\}$;
- $gg' = nhn'h' = n(hn'h^{-1})hh' = n''h'' \implies n'' = n \text{ AD}_h(n') \ ; \ h'' = hh'$.

Recíprocamente,

DEFINIÇÃO [5.24]

Dados dois grupos s.l.c. N e H e uma acção $h \in H \rightarrow \alpha_h \in \text{Aut}(N)$ de H em N , o **PRODUTO SEMI-DIRECTO** $G = N \rtimes H$ é um novo grupo formado pelos pares $g = (n, h) \in N \times H$ com o produto

$$gg' = (n\alpha_h(n'), hh') = g'' \implies n'' = n\alpha_h(n') \ ; \ h'' = hh'$$

- $N \simeq \{g = (n, e)\}_{n \in N}$ e $H \simeq \{g = (e, h)\}_{h \in H}$ são subgrupos fechados.
- $hnh^{-1} = (e, h)(n, e)(e, h^{-1}) = (\alpha_h(n), h)(e, h^{-1}) = (\alpha_h(n), e) \simeq \alpha_h(n)$
- $G = N \rtimes H$ é localmente compacto na topologia produto se $\alpha_h(n)$ for contínuo nas duas variáveis.
- Como α_h define uma acção de H em N , então $\alpha_h \circ \alpha_{h'} = \alpha_{hh'}$.
- Se $g = (n, h) \implies g^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$

EXEMPLO

IV.24 - i. $N = (\mathbb{R}^d, +)$, $H = GL(d, \mathbb{R})$, $\alpha_h(\mathbf{n}) = h \cdot \mathbf{n}$.

O **GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES AFINS** de $\mathbb{R}^d \simeq N \times \{e\}$ é $G = \mathbb{R}^d \rtimes GL(d, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} (gg')(\mathbf{x}, e) &= g(g'(\mathbf{x}, e)) = g(\mathbf{n}' + h' \cdot \mathbf{x}, h') = \\ &= (\mathbf{n} + h \cdot \mathbf{n}' + hh' \cdot \mathbf{x}, hh') = g''(\mathbf{x}, e) \implies \mathbf{n}'' = \mathbf{n} + h \cdot \mathbf{n}' \ ; \ h'' = hh' \end{aligned}$$

IV.24 - ii. O **GRUPO DE POINCARÉ** (ou grupo de Lorentz inhomogéneo) é o produto semi-directo das translações espaço-tempo ($N = (\mathbb{R}^4, +)$) e das transformações de Lorentz ($H = SO(3, 1)$).

IV.24 - iii. O grupo S_3 das permutações de 3 objectos é o produto semidirecto dum grupo cíclico de ordem 3 e dum grupo cíclico de ordem 2: $S_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Se $G = N \rtimes H$, qualquer representação unitária $\mathbf{U}$ de G fica determinada pelas suas restrições $\mathbf{U}^H$ e $\mathbf{U}^N$ porque

$$\mathbf{U}_{(n,h)} = \mathbf{U}_{(n,e)(e,h)} = \mathbf{U}_n^N \mathbf{U}_h^H$$

Estas representações verificam

$$(5-4) \quad \mathbf{U}_{(n,h)(n',h')} = \mathbf{U}_{n\alpha_h(n')}^N \mathbf{U}_{hh'}^H \implies \mathbf{U}_h^H \mathbf{U}_n^N \mathbf{U}_{h^{-1}}^H = \mathbf{U}_{\alpha_h(n)}^N$$

Esta condição (5-4) torna-se num **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE** se supusermos que N é **ABELIANO** e fazendo uma decomposição espectral para substituir $\mathbf{U}^N$ pela sua **MEDIDA ESPECTRAL**. Aqui $\hat{N}$ é o H -espaço Boreliano para a acção $h : \chi \rightarrow \chi_h = \alpha_{h^{-1}}^*(\chi)$ de H em $\hat{N}$, definida pelo automorfismo dual de α_h

$$\begin{aligned} \alpha_h^* : \hat{N} &\rightarrow \hat{N} \\ \chi &\mapsto \alpha_h^*(\chi) = \chi \circ \alpha_h \end{aligned}$$

Pelo Teorema Espectral, cada representação unitária de N está associada a uma única **MEDIDA C/VALOR PROJECCÃO P**, em $\hat{N}$, tal que

$$\mathbf{U}_n^N = \int_{\hat{N}} \hat{n}(\chi) d\mathbf{P}_\chi$$

$\mathbf{U}^H$ verifica (5-2) se e só se a respectiva medida c/valor projecção verifica

$$(5-5) \quad \mathbf{U}_h^H \mathbf{P}_{\hat{\mathcal{B}}} \mathbf{U}_{h^{-1}}^H = \mathbf{P}_{\hat{\mathcal{B}}h^{-1}}$$

porque

$$\begin{aligned} (5-6) \quad \mathbf{U}_h^H \mathbf{U}_n^N \mathbf{U}_{h^{-1}}^H &= \int_{\hat{N}} \hat{n}(\chi) d(\mathbf{U}_h^H \mathbf{P}_\chi \mathbf{U}_{h^{-1}}^H) = \\ \mathbf{U}_{\alpha_h(n)}^N &= \int_{\hat{N}} \widehat{\alpha_h(n)}(\chi) d\mathbf{P}_\chi = \int_{\hat{N}} \hat{n}(\chi) d\mathbf{P}_{\alpha_h^{-1}(\chi)} \end{aligned}$$

Como os caracteres separam os pontos de N , (5-6) implica (5-5) para qualquer Boreliano $\hat{\mathcal{B}} \in \hat{N}$.

DETERMINAR UMA REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA DE G É EQUIVALENTE A ENCONTRAR UMA REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA $\mathbf{U}^H$ DE H E UM SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE $\mathbf{P}$ PARA $\mathbf{U}^H$ E A ACÇÃO DE H NO DUAL $\hat{N}$.

TEOREMA

Seja $\hat{T}$ o sub-conjunto de $\hat{N}$ que intersecta cada H -órbita em $\hat{N}$ num ponto único. Para cada $\chi \in \hat{T}$, designemos por $H_\chi = \{h \in H : \alpha_h^*(\chi) = \chi\}$ o seu grupo de estacionaridade. Se $\mathbf{U}^{H_\chi}$ for uma representação primária de H_χ , então $\chi \mathbf{U}^{H_\chi} : (n, h_\chi) \rightarrow \chi(n) \mathbf{U}_{h_\chi}^{H_\chi}$ é uma representação do subgrupo $N \rtimes H_\chi$ de G .

Então, a **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** $\mathbf{U}^{G(N \rtimes H_\chi)}$ é uma representação de G primária e de tipo transitivo, e é **IRREDUTÍVEL** se $\mathbf{U}^{H_\chi}$ o for.

- Uma representação é de tipo transitivo se a classe de medida invariante e ergódica associada à Medida Espectral $\mathbf{P}$ (do sistema de imprimitividade para $\mathbf{U}^H$ e a acção de H em $\hat{N}$) é transitiva, ou tem medida positiva em qualquer órbita O de H em $\hat{N}$.
- Cada órbita é um H -espaço homogéneo e isomorfo ao quociente $O_\chi = \hat{K}_\chi \backslash \hat{H}$ de H pelo subgrupo de estacionaridade $\hat{K}_\chi = \{h \in H : \chi h \equiv \alpha_h^*(\chi) = \chi\}$ de $\chi \in \hat{N}$.
- No caso $G = N \rtimes H$ com N **ABELIANO**, todas as representações unitárias **IRREDUTÍVEIS** de G são **INDUZIDAS** por um subgrupo não trivial de G , e são todas determinadas por:
 - (a) parâmetros que caracterizam uma órbita $\hat{O}$ de H no dual $\hat{N}$;
 - (b) e parâmetros adicionais que caracterizam a representação do subgrupo de estabilidade da órbita $\hat{O}$.

EXEMPLO

(5-7) O grupo Euclideano e o grupo de Poincaré. No caso do grupo de **POINCARÉ**:

- (a) o parâmetro que caracteriza a órbita é a **MASSA**;
- (b) o parâmetro que caracteriza a representação do subgrupo de estabilidade da órbita é o **SPIN**.

(5-8) $N = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}; \quad \mathbf{n} = \{x, y\} \quad \& \quad \mathbf{n}\mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{n}'\}$ – grupo de translações do plano.

$H = \{h \in SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1; \quad h = e^{J\theta} \quad \& \quad hh' = e^{J(\theta+\theta')}\}$ – grupo de rotações em torno da origem.

Aqui $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. H age em N através de $\mathbf{n}h = \mathbf{n} \cdot e^{J\theta} = \{x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta\}$

Para cada $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ existe um character de N

$$\chi_{\mathbf{z}}(\mathbf{n}) = e^{i \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}} = e^{i(ax + by)}$$

e todos os caracteres de N são desta forma (porque N é abeliano), donde o seu dual é

$$\hat{N} = \{\chi_{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2\} \simeq \mathbb{R}^2$$

Podemos definir uma acção de H em $\hat{N}$ como uma rotação de $\mathbf{z}$

$$(\alpha_{h^{-1}}^* \chi_{\mathbf{z}})(\mathbf{n}) = \chi_{\mathbf{z}}(\mathbf{n} \cdot h^{-1}) = \chi_{\mathbf{z} \cdot h}(\mathbf{n})$$

pelo que $\chi_{\mathbf{z}}$ e $\chi_{\mathbf{z}'}$ estão na mesma órbita se e só se $|\mathbf{z}| = |\mathbf{z}'|$. O conjunto Boreliano que parametriza as órbitas é aqui $\hat{T} = \{\mathbf{z}_0 = \{r, 0\}, r \geq 0\} \simeq \mathbb{R}$ e, para cada $r > 0$, os subgrupos de estabilidade de cada órbita são todos $H_{\chi_{\mathbf{z}_0}} = \{e\}$. Então $N \rtimes H_{\chi_r} \simeq N$ e $\mathbf{U}^{H_{\chi_r}}$ é a representação trivial, pelo que $\mathbf{U}^{N \rtimes H_{\chi_r}} = \mathbf{U}^N = \chi_r$. Assim, as representações induzidas de G por cada órbita O_{χ_r} são as representações induzidas pelos caracteres de N e como tal são irredutíveis e todas inequivalentes. O espaço suporte de cada uma destas representações é $\mathcal{L}^2(H \backslash N \backslash G, \mu, \mathbb{C})$ de dimensão infinita.

5.13 Acção Co-Adjunta e Órbitas em $\mathfrak{g}^*$

Para determinar as órbitas da acção co-adjunta dum grupo G na sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$, definida por

$$(\text{Ad}_g^* \alpha)(X) = \alpha(\text{Ad}_g X); \quad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}, g \in G$$

podemos usar o facto de que, para grupos matriciais, a acção adjunta Ad em G , sendo a tangente à acção adjunta de G em si próprio

$$A_g : G \longrightarrow G \\ g' \longmapsto A_g(g') = g g' g^{-1}$$

é simplesmente ainda

$$T_e A_g \equiv \text{Ad}_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ X \mapsto \text{Ad}_g X = g X g^{-1}$$

Para um grupo **SEMI-SIMPLES**, o **TENSOR DE KILLING-CARTAN**

$$g = c_{ik}^m c_{mj}^k e^i \otimes e^j$$

é não-degenerado, por isso existe para estes grupos um isomorfismo entre G e $\mathfrak{g}^*$ naturalmente dado por

$$\alpha_Y = \iota_Y g \implies \alpha_Y(X) = c_{ik}^m c_{mj}^k Y^i X^j$$

Contudo, para grupos de Lie em geral, embora a cada $Y \in \mathfrak{g}$ possamos associar naturalmente uma forma linear $\alpha_Y \in \mathfrak{g}^*$

$$g(Y, X) = \alpha_Y(X) = \text{Tr}(\text{ad}_Y \cdot \text{ad}_X) \quad \text{onde} \quad \text{ad}_Y = c_{ik}^m Y^i e_m \otimes e^k$$

conversamente, a menos que o tensor de Killing-Cartan seja não-degenerado, nem sempre existe $Y \in \mathfrak{g}$ tal que, dado $\alpha \in \mathfrak{g}^*$,

$$\alpha = \iota_Y g = c_{ik}^m c_{mj}^k Y^i e^j$$

Contudo, no caso de **GRUPOS MATRICIAIS**, é sempre possível que toda a forma linear $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ seja associada a um vector de G (embora não necessariamente bijectivamente), i.e. para qualquer forma linear em $\alpha \in \mathfrak{g}^*$,

$$\exists A \in G : \quad \alpha(X) = \text{Tr}(AX) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

De facto, se $A_i = (A_i)_k^j e_j \otimes e^k$ for uma base de G e $A^r = (A^r)_s^t e_t \otimes e^s$ a sua base dual, então

$$\langle A^r, A_i \rangle = (A^r)_s^t (A_i)_k^m \delta_m^s \delta_t^k = (A^r)_s^k (A_i)_k^s = \text{Tr}(A^r A_i) = \delta_r^i$$

e por isso, se $X = X^i A_i \in \mathfrak{g}$ e $\alpha = \alpha_r A^r \in \mathfrak{g}^*$, teremos

$$\alpha(X) = \alpha_r (A^r)_s^t X^i (A_i)_k^m \delta_m^s \delta_t^k = \alpha_r (A^r)_s^t X^i (A_i)_t^s = (A)_s^t (X)_t^s = \text{Tr}[AX]$$

onde usámos $A = \alpha_r (A^r)_s^t e_t \otimes e^s$ como o vector pretendido.

Para determinar a **ÓRBITA** que passa por $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ basta-nos obter os elementos de G que deixam α invariante na acção co-adjunta. Estes elementos do grupo **ESTABILIZADOR** de α verificam

$$(5-9) \quad a \in K_\alpha \implies \text{Ad}_a^* \alpha = \alpha \implies a^{-1} A a = A$$

Poderemos portanto identificar a órbita passando por α com $O_\alpha = G/K_\alpha$.

— **EXEMPLO:** $G = SO_3(\mathbb{R})$ —

A álgebra de Lie de $SO_n(\mathbb{R})$ é

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{so}_n(\mathbb{R}) = \{\mathbf{A} \in M_{n \times n} : \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}, \text{Tr}(\mathbf{A}) = 0\}$$

Em três dimensões, é fácil ver o que são as órbitas. De facto, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ significa que se pode escrever

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{w} \times .$$

i.e. o produto vectorial com $\mathbf{w}$. Se $a \in K_\alpha \subset G = SO_3(\mathbb{R})$, a condição **(5-9)** pode escrever-se como a condição que, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$(a^{-1}\mathbf{A}a) \cdot \mathbf{x} = a^{-1}(\mathbf{w} \times (a\mathbf{x})) = \mathbf{w} \times \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Mas como é sabido, para transformações ortogonais $(a\mathbf{w}) \times (a\mathbf{x}) = a(\mathbf{w} \times \mathbf{x})$ pelo que se deve ter $a\mathbf{w} = \mathbf{w}$, i.e. $a \in K_\alpha$ deve ser uma rotação em torno da direcção $\mathbf{w}$. Assim, $SO_3(\mathbb{R})/K_\alpha$ é o espaço gerado por rotações em torno de apenas dois eixos ortogonais a $\mathbf{w}$. Como se pode ver, o efeito destas rotações em $\mathbf{A}$ é equivalente a

$$(g^{-1}\mathbf{A}g)\mathbf{x} = g^{-1}(\mathbf{w} \times (g\mathbf{x})) = (g^{-1}\mathbf{w}) \times \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, g \in SO_3(\mathbb{R})/K_\alpha$$

pelo que estas rotações fazem $\mathbf{w}$ descrever uma superfície esférica de raio

$$O_\alpha = S_r^2 = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{w}\|^2 = -\frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{A}^2) = r^2 \right\}$$