

Elementos de

TEORIA DE GRUPOS PARA FISICA

AMARO JOSÉ RICA DA SILVA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

©2018

PROGRAMA

I	Introdução	1
1	Breve História das origens	3
1.1	As equações algébricas e o advento da teoria dos grupos	3
	Da Antiguidade à Renascença a meados do século XVII	4
	Final do Século XVII soluções por radicais	5
	Século XVIII, Lagrange, Vandermonde e Gauss	8
	Os resolventes de Lagrange	9
	Vandermonde, Gauss e as equações ciclotómicas	14
	Raízes da Unidade	17
	Transformada de Möbius	21
	Século XIX, Abel e Galois	22
1.2	Grupos e Geometrias	23
	Geometria Projectiva	24
	Geometria Afim	24
	Geometria Métrica	25
1.3	Grupos e Geometrias em Física	27
	Estruturas Matemáticas em Mecânica Clássica	27
	Estruturas Matemáticas em Mecânica Quântica	27
	Mecânica Lagrangeana	28
	Objecções à descrição Lagrangeana	29
	Estrutura Simplética Canónica	31
	A equação de Klein-Gordon	32
	A equação de Dirac	32
	O Grupo de Poncaré	33
1.4	Grupos de Transitividade em espaços de Estados	33
1.5	Grupos e Geometria Diferencial	33

II	Grupos: Definições Básicas	35
2	Grupos Abstractos	37
2.1	Estruturas Algébricas	37
	Semi-grupo, Monóide, Grupo, Anel, Corpo, Espaço Vectorial, Álgebra	37
	Acção de um Grupo	40
2.2	Grupos de Permutações	41
	Grupo de Permutações e Grupo Simétrico S_n	41
	Grupo de Permutações Regulares	42
2.3	Sub-grupos	43
	Sub-grupo Próprio, Normal	43
	Co-conjuntos de um sub-grupo	44
	Índice dum Sub-grupo	44
	Teorema de Lagrange	44
	Grupo Quociente, Factor	45
	Grupo Simples, Resolúvel, Séries Invariantes	46
2.4	Classificação de Grupos Finitos	46
	Teorema de Cayley	46
2.5	Classes de Conjugação	47
	Operação de Conjugação	47
	Álgebra de um Grupo Finito	48
	Classes de Conjugação de S_n	49
	Diagramas de Young	50
2.6	Problemas da Parte II	52
III	Representações de Grupos	67
3	Teoria de Representações	69
3.1	Representações de Grupos	69
	Soma directa de Representações de um grupo	71
	Produto directo de Representações	71
	Equivalência, Unitaridade, Redutibilidade	73
3.2	Representações Redutíveis de Grupos	76
	Representação Completamente Redutível	76
	Teorema de Maschke	77
3.3	Representações Irredutíveis de Grupos	79
	1º Lema de Schur	79

2º Lema de Schur	80
Grupos Abelianos	80
4 Representações de Grupos finitos e Compactos	81
4.1 Caracteres de Grupos Abelianos	82
Caracter Linear dum Grupo	83
Operadores de Projecção	84
4.2 Caracteres de Grupos Não-Abelianos	85
Caracter duma Representação dum Grupo	85
4.3 Relações de Ortogonalidade	86
Ortogonalidade de Funções sobre G	87
1ª Relação de Ortogonalidade	88
4.4 Representação Regular	88
Decomposição da Representação Regular	89
Teorema de Burnside	90
4.5 Relações de Ortogonalidade - 2ª Parte	91
Sistema Ortogonal Completo de Funções em G	91
2ª Relação de Ortogonalidade	92
4.6 Representações Irreduzíveis	94
Classes e Representações Irreduzíveis	94
Representações Irreduzíveis de \mathcal{D}_4	96
Representações da Álgebra Quaterniónica	99
Representações Irreduzíveis de S_3	101
Representações Irreduzíveis associadas a tabelas de Young	103
Teorema de Neuman-Peter-Weyl	105
4.7 Extensão de Representações	108
Levantamento de Representações	108
Representações Induzidas por sub-grupos	108
4.8 Exercícios	111
Álgebra de Clifford-Dirac	111
Grupo Simétrico Alternante A_4	114
4.9 Problemas da Parte III	115
IV Grupos Infinitos	119
5 Grupos Contínuos	121
5.1 Grupos Topológicos	122

Topologia	122
Carta Local	123
Funções de Transição	124
Variedade Topológica	124
Grupo Topológico	124
5.2 Grupos de Lie	125
Diferenciabilidade	125
Grupo de Lie	125
Grupos e Álgebras de Lie Clássicos	125
Grupo Ortogonal $G = O_2(\mathbb{R})$	126
Grupo Unitário especial $G = SU_2(\mathbb{C})$	127
Álgebra de Lie $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$	127
Grupo $G = SO_3(\mathbb{R})$	128
5.3 Os grupos $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$	129
O grupo de Möbius \tilde{M}	129
Projecção Estereográfica e $SU_2(\mathbb{C})$	130
Rotações e Ângulos de Euler	131
5.4 O grupo $SO_3(\mathbb{R})$ de rotações em \mathbb{R}^3	133
Representação induzida por $SU_2(\mathbb{C})$	136
5.5 Representações Irreduzíveis de $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$	137
Raízes e Forma Canónica de Relações de Comutação	138
Constantes de Estrutura e Representação Regular de álgebra	138
6 Grupos Localmente Compactos	139
6.1 Medida Invariante Sobre um Grupo	139
Espaços de Medida	139
Medida de Haar	140
6.2 Teoremas	141
Teorema de Peter-Weyl	141
Dualidade de Grupos	141
Teorema de Pontryagin	142
Teorema de Plancherel	143
6.3 Decomposição de Mackey	144
Teorema de Mackey	144
6.4 Medidas c/valor Projecção	145
Teorema Espectral para Grupos Abelianos	145
6.5 Representações Induzidas	147

6.6	Sistemas de Imprimitividade	151
6.7	Produtos Semi-directos	152
6.8	Problemas da Parte IV	155
V	Aplicações	171
7	Grupos em Física	173
7.1	Exemplos	173
	Simetrias da Equação de Ondas	173
	Simetrias duma equação não-linear de Schrödinger	174
	Fibrado de Referenciais do Hiperbolóide	180
	Estatística quântica: Função de Partição Rotacional Z_{rot}	189
7.2	Tópicos propostos	194
	Quebra espontânea de Simetria	194
	Tabela Periódica e Teoria de Grupos	195
	Regras de Selecção em Mecânica Quântica	195
	Simetrias dinâmicas de Sistemas Relativistas e não-Relativistas	195
	Algebras de Lie e Mecânica Quântica	195
	Simetrias de Equações Diferenciais e Leis de Conservação	195
	As representações Irreduzíveis do Grupo de Poincaré	195
	Paridade e Física: Inversões de Espaço e Tempo	195
	Equações de Onda Relativistas	196
	Formas Invariantes em Grupos de Lie e Equações de Maurer-Cartan	196
VI	Apêndices	197
A	Simetrias e Fibrados Vectoriais	199
A.1	Nota sobre Simetrias e Fibrados Vectoriais	199
B	Estruturas em Espaços Vectoriais	203
B.1	Estrutura Euclideana	203
B.2	Estrutura Complexa	204
B.3	Estrutura Simplética	207
C	Tópicos de Análise Funcional	209
C.1	Álgebras e Operadores Auto-Adjuntos em Espaços de Hilbert	209
	Operador Adjunto	209
	Família Espectral	210

O Teorema Espectral	211
D Estruturas Diferenciáveis	213
D.1 Atlas em Variedades	213
Cartas Compatíveis	213
Atlas C^r	213
Variedade Topológica, Analítica	214
VII Bibliografia	217
VIII Índice	219

Prefácio

Estas notas resultam da preparação de uma cadeira opcional do 4º ano da Licenciatura de Engenharia Física Tecnológica, e naturalmente destinam-se a alunos de Física, Engenharia Física ou Matemática interessados em explorar os conceitos de teoria de grupos e as suas vastas aplicações em todos os domínios das ciências exactas.

Sendo uma introdução à teoria de grupos este texto não pode abraçar os tópicos mais “quentes” da actualidade, como a classificação de partículas elementares, a teoria de grupos quânticos, super-cordas e gravitação quântica, pelo simples facto de ser destinado a um semestre apenas de aulas. A utilização destes conceitos nessas modernas teorias apenas é referida para reforçar a importância deste tópico na cultura de base de um estudante que aspire a trabalhar nas áreas mais estimulantes da fronteira da Física e da Matemática.

Em contrapartida, procurou-se dar uma introdução por via de exemplos explícitos aos vários conceitos e definições que formam o esqueleto da teoria dos grupos e suas representações lineares. Sendo uma teoria com mais de um século de desenvolvimento, muitos dos seus resultados estão amplamente demonstrados em excelentes textos matemáticos, pelo que não se dá grande evidência ao rigor de exatidão matemática na demonstração mais geral possível destes resultados, mas optou-se por demonstrações de casos particulares mais simples que ilustrem bem o caminho a seguir em situações mais gerais ou dêem credibilidade à sua generalização.

Este não é um texto de divulgação, mas sim um documento de trabalho que requer capacidades mínimas de matemática e de física para poder seguir as demonstrações e exemplos e resolver obrigatoriamente os problemas sugeridos no fim de cada capítulo, e que foram compilados das séries de problemas e aulas práticas dadas durante o curso. Alguns destes problemas são suficientemente avançados para serem catalogados de pós-graduação, mas como na vida real muitas vezes o trabalho que se faz na tentativa de chegar a um objectivo que parece inacessível dá frutos importantes, sendo além disso de notar que o estímulo à pesquisa por iniciativa própria é um elemento primordial para a formação destes alunos na fase final do curso.

No último capítulo listam-se tópicos propostos para monografias explorando aplicações importantes da teoria a vários ramos da Física, assumindo à partida que os alunos já foram expostos a alguma informação sobre Mecânica Quântica, Relatividade Restrita e Generalizada, Cálculo Tensorial e Análise em Variedades.

Os apêndices incluídos não pretendem ser de nenhuma forma completos mas apenas lembrar noções úteis nas aplicações desenvolvidas no texto e problemas.

PARTE I

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 1

BREVE HISTÓRIA DAS ORIGENS

Contents

1.1 As equações algébricas e o advento da teoria dos grupos	3
Da Antiguidade à Renascença a meados do século XVII	4
Final do Século XVII soluções por radicais	5
Século XVIII, Lagrange, Vandermonde e Gauss	8
Os resolventes de Lagrange	9
Vandermonde, Gauss e as equações ciclotómicas	14
Raízes da Unidade	17
Transformada de Möbius	21
Século XIX, Abel e Galois	22
1.2 Grupos e Geometrias	23
Geometria Projectiva	24
Geometria Afim	24
Geometria Métrica	25
1.3 Grupos e Geometrias em Física	27
Estruturas Matemáticas em Mecânica Clássica	27
Estruturas Matemáticas em Mecânica Quântica	27
Mecânica Lagrangeana	28
Objecções à descrição Lagrangeana	29
Estrutura Simplética Canónica	31
A equação de Klein-Gordon	32
A equação de Dirac	32
O Grupo de Poncaré	33
1.4 Grupos de Transitividade em espaços de Estados	33
1.5 Grupos e Geometria Diferencial	33

1.1 As equações algébricas e o advento da teoria dos grupos

Os primeiros indícios de aplicação matemática de grupos de permutações aparecem na tentativa de explicar o insucesso da resolução por radicais das equações algébricas de grau $n \geq 5$ por volta de 1770 com os trabalhos de Lagrange e Vandermonde e posteriormente Abel e Gauss. É na sequência destes trabalhos que finalmente Galois exprimiria formalmente em 1831 a teoria abstracta de grupos e a conexão entre

os grupos designados resolúveis e as condições para existência de soluções por radicais de equações algébricas com coeficientes racionais.

A sistematização das técnicas para determinação algébrica de equações polinomiais por radicais tem uma longa história.

1 – DA ANTIGUIDADE À RENASCENÇA A MEADOS DO SÉCULO XVII

Os Gregos do tempo de Arquimedes ($\approx 250AC$) certamente possuíam métodos de grande aproximação para o cálculo indefinido de raízes quadradas, embora se desconheça como o faziam. Durante a Idade Média foi conseguida a resolução de equações quadráticas e bi-quadráticas pelo método de radicais. No princípio do século XVI Scipione del Ferro (1515) chega pela primeira vez à expressão para uma raiz da equação cúbica $x^3 + ax = b$ ¹ que é hoje conhecida por fórmula de Cardano (1545):

$$(1-1) \quad x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

escrevendo $x = y - z$ e usando o constrangimento $yz = \frac{a}{3}$ para reduzir a cúbica à equação $y^3 + z^3 = b$. Estas duas equações dão origem ao sistema

$$\begin{cases} y^3 - z^3 = b \\ y^3 z^3 = \left(\frac{a}{3}\right)^3 \end{cases}$$

que pode facilmente ser resolvido em ordem a y^3 e z^3 para produzir

$$(1-2) \quad y^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \quad ; \quad z^3 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}$$

donde resulta (1-1).

É interessante notar aqui que a fórmula de del Ferro-Cardano causou grande comoção nos círculos matemáticos da altura quando foi publicada por Cardano. Não sómente havia ainda grande aversão à utilização de números negativos, como se tornava evidentemente chocante que as raízes reais da cúbica tivessem que ser obtidas pela soma de números complexos. Cardano nunca considera soluções complexas,² e só em 1732 é que Euler mostra que existem sempre três raízes da cúbica, e que das 9 possíveis combinações das soluções de (1-2) apenas aquelas cujo produto $yz = \frac{a}{3}$ são boas.³ Assim, designando $\zeta_k = (-1)^{\frac{2k}{3}}$ as raízes cúbicas da unidade

$$(1-3) \quad \zeta_1 = (-1)^{2/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad \zeta_2 = (-1)^{4/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad \zeta_3 = (-1)^{6/3} = 1$$

a expressão correcta para (1-1) quando $a \geq 0$ é

$$(1-4) \quad x_k = \zeta_k \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} - \zeta_k^2 \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \quad (k = 1, 2, 3)$$

1 - à qual todas a cúbicas se podem reduzir: se originalmente $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ a simples translação da origem $x \rightarrow x - \frac{a_2}{3}$ produz $x^3 + \left(a_1 - \frac{a_2^2}{3}\right)x - a_0 + \frac{a_1a_2}{3} - \frac{2a_2^3}{27}$

2 - e considera como diferente a mesma equação com coeficientes negativos porque a reformula de forma a aparecerem apenas coeficientes positivos

3 - Em linguagem corrente, a solução da cúbica de del Ferro é um primeiro indício de que as raízes de equações algébricas sobre um corpo \mathbb{K} têm que ser obtidas "extendendo" o corpo com "raízes da unidade" ζ_k (como \mathbb{R} se estende a \mathbb{C} por adição de múltiplos reais de $i = \sqrt{-1}$).

Quando $a < 0$ é preciso usar

$$(1-5) \quad x_k = \zeta_k \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \zeta_k^2 \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} \quad (k = 1, 2, 3)$$

II – FINAL DO SÉCULO XVII SOLUÇÕES POR RADICAIS

Nos finais do século XVII, Leibnitz e Tschirnhaus eram dos poucos que ainda estudavam soluções por radicais de equações algébricas. As novas disciplinas do cálculo infinitesimal ocupavam então as atenções dos estudiosos. Tschirnhaus propôs em 1683 o seguinte método de resolução da equação $\mathcal{P}_n(x) = 0$ para um polinómio geral de grau n

$$\mathcal{P}_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

sendo a primeira sistematização de soluções em radicais para equações algébricas:

Este método consiste converter cada equação polinomial $\mathcal{P}_n(x) = 0$ numa equação do tipo

$$(1-6) \quad y^n - c_n = 0$$

resolver esta e usar as suas raízes para formar uma equação de grau inferior e assim sucessivamente até obter uma equação resolúvel.

Defina-se uma nova variável

$$y_n(x) = x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0$$

com coeficientes desconhecidos b_i mas de grau $n-1$ em x e use-se as duas equações, $\mathcal{P}_n(x) = 0$ e $y_n(x) = y$ para eliminar x .⁴ O novo polinómio

$$(1-7) \quad Q_n(y) = y^n + A_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) y^{n-1} + \dots + A_{n-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + A_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

em y tem n coeficientes $A_k(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ que dependem dos n coeficientes conhecidos $\mathbf{a} = \{a_i\}$ e de $n-1$ coeficientes desconhecidos $\mathbf{b} = \{b_j\}$. Se impusermos que $Q_n(y)$ em (1-7) deve ter a forma simples

$$Q_n(y) = y^n - c_n$$

onde c_n é uma constante a determinar, temos que resolver equações de constrangimento para os n coeficientes desconhecidos $\{\mathbf{b}, c_n\}$ de forma que

$$A_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = c_n \delta_{nk} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Este sistema de n equações com n incógnitas é resolúvel em princípio para exprimir $b_j = b_j(\mathbf{a})$ e $c_n = c_n(\mathbf{a})$ em função dos coeficientes conhecidos $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$. As raízes da equação $Q_n(y) = 0$ são então determinadas por radicais $y_k(\mathbf{a}, n)$, ($k = 0, 1, \dots, n-1$) que verificam $y_k(\mathbf{a}, n)^n = c_n(\mathbf{a})$. Para cada uma destas raízes existe agora um novo polinómio de grau inferior

$$\mathcal{P}_{n-1}(x, k) = y_n(x) - y_k(\mathbf{a}, n) = x^{n-1} + b_{n-2}(\mathbf{a}) x^{n-2} + \dots + b_0(\mathbf{a}) - y_k(\mathbf{a}, n)$$

cujas raízes se podem calcular por iteração deste método até se chegar a uma forma polinomial resolúvel. Infelizmente este processo funciona apenas se as equações $A_k(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = c_n \delta_{kn}$ forem mais simples de resolver

⁴ - Isto em si é já um problema computacionalmente complicado que hoje em dia está no âmbito da teoria de eliminação algébrica. Uma das técnicas usadas actualmente envolve a determinação de bases de Gröbner para eliminação de variáveis de um sistema de equações polinomiais multivariadas.

que a original. Para $n = 2, 3, 4$ isso acontece, mas para $n = 5$ estas equações têm grau 24 e não são obviamente redutíveis a equações de grau menor.

Dada a multiplicidade de raízes para cada operação radical $y_k(\mathbf{a}, n)^n = c_n(\mathbf{a})$ durante este processo existem várias combinações para a forma dos coeficientes finais $b_o(\mathbf{a})$ e $y_j(\mathbf{a}, k)$, por isso existem outras tantas raízes possíveis.

PARA $n = 2$

teríamos

$$\begin{cases} \mathcal{P}_2(x) = 0 \\ y_2(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + a_1 x + a_2 = 0 \\ x + b_0 = y \end{cases}$$

Eliminando x destas equações obtém-se

$$y^2 + (a_1 - 2b_0)y + (a_2 - a_1b_0 + b_0^2) = 0$$

que queremos que seja da forma

$$\mathcal{Q}_2(y) = y^2 + A_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})y + A_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = y^2 - c_2 = 0$$

Deve-se assim resolver

$$\begin{cases} A_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1 - 2b_0) = 0 \\ A_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_2 - a_1b_0 + b_0^2 = -c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_0(\mathbf{a}) = \frac{a_1}{2} \\ c_2(\mathbf{a}) = \frac{1}{4}(a_1^2 - 4a_2) \end{cases}$$

As raízes da equação $\mathcal{Q}_2(y) = y^2 - c_2 = 0$ são então $y_{\pm} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2}$, donde o novo polinómio a estudar é

$$\mathcal{P}_1(x) = y_2(x) - y_{\pm} = x + b_0(\mathbf{a}) - y_{\pm} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{a_1}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2} = 0$$

Este tem as soluções bem conhecidas

$$x = -\frac{a_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a_1^2 - 4a_2}$$

PARA $n = 3$

teríamos

$$\begin{cases} \mathcal{P}_3(x) = 0 \\ y_3(x) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x^2 a_1 + x a_2 + a_3 = 0 \\ x^2 + b_1 x + b_0 = y \end{cases}$$

O mesmo procedimento se faria, embora com expressões bastante mais longas. Em vez disso, vamos ver para um caso explícito em que conheçamos as raízes como se apresentam as dificuldades neste método. Assim consideraremos o polinómio com raízes reais

$$\mathcal{P}_3(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3) \equiv x^3 + 3x^2 - x - 3$$

Neste caso portanto $a_1 = 3, a_2 = -1, a_3 = -3$. A eliminação de x faz-se como anteriormente usando as equações $y(x) = y$ para substituir x em $\mathcal{P}_3(x)$ e obter um polinómio em y que se pretende na forma $y^3 - c_3$

$$\mathcal{Q}_3(y) = y^3 + A_1y^2 + A_2y + A_3 = y^3 - c_3$$

donde se obtêm os coeficientes

$$\begin{cases} A_1 = 3(b_0 - b_1) = -11 \\ A_2 = b_0(16 - 3b_1) - b_1^2 + 3(2 + b_0)(b_0 - b_1) = -19 \\ A_3 = (9 + b_0 - 3b_1)(1 + b_0 - b_1)(1 + b_0 + b_1) = c_3 \end{cases}$$

com soluções

$$c_3 = -\frac{512}{27} \quad ; \quad b_0^\pm = -\frac{5}{3} \pm \frac{2i}{\sqrt{3}} \quad ; \quad b_1^\pm = 2 \pm \frac{2i}{\sqrt{3}}$$

As soluções pretendidas da equação $y^3 - c_3 = 0$ são

$$Y_k = \frac{8}{3}(-1)^{(2k+1)/3} \quad (k = 0, 1, 2) \quad \iff \quad \begin{cases} Y_0 = \frac{8}{3}(-1)^{1/3} = \frac{4}{3} + \frac{4i}{\sqrt{3}} \\ Y_1 = -\frac{8}{3} \\ Y_2 = \frac{8}{3}(-1)^{2/3} = \frac{4}{3} - \frac{4i}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Para cada uma destas soluções obtêm-se um polinómio de grau 2

$$\mathcal{P}_2(x)_k^\pm = y_3(x) - Y_k = x^2 + b_1^\pm x + b_0^\pm - Y_k \quad (k = 0, 1, 2)$$

A repetição do método agora com $y_2(x) = x + d_0 = y$ conduz a

$$\mathcal{Q}_2(y) = y^2 + A_1y + A_2 = y^2 - c_2$$

onde, para cada b^\pm e Y_k se obtêm

		$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
b^-	$d_0^- = 1 - \frac{i}{\sqrt{3}}$	$c_2 = \frac{11}{3} + \frac{4i}{\sqrt{3}}$	$c_2 = -\frac{1}{3}$	$c_2 = \frac{11}{3} - \frac{4i}{\sqrt{3}}$
b^+	$d_0^+ = 1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$			

com as seguintes soluções, usando primeiro b^- e $x = d_0^- \mp \sqrt{c_2}$

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$x_0^- = -3$	$x_1^- = -1$	$x_2^- = -3 + \frac{2i}{\sqrt{3}}$
$x_0^- = 1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}$	$x_1^- = -1 + \frac{2i}{\sqrt{3}}$	$x_2^- = 1$

e depois b^+ com $x = d_0^+ \mp \sqrt{c_2}$.

$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
$x_0^+ = -3 - \frac{2i}{\sqrt{3}}$	$x_1^+ = -1 - \frac{2i}{\sqrt{3}}$	$x_2^+ = -3$
$x_0^+ = 1$	$x_1^+ = -1$	$x_2^+ = 1 - \frac{2i}{\sqrt{3}}$

Como se pode ver, as únicas raízes comuns nos dois casos são as raízes reais $x = 1, -1, -3$, enquanto que as soluções complexas não são de facto boas soluções do polinómio original, i.e. são raízes parasitas. Este método é portanto muito frágil, em particular porque a complexidade das equações para os coeficientes depressa ultrapassa para $n > 4$ a da equação original, e também porque apresenta mais raízes do que realmente existem. Será preciso esperar até cerca de 1770 para que Lagrange e Vandermonde contribuissem com novos elementos para a resolução de equações algébricas.

III – SÉCULO XVIII, LAGRANGE, VANDERMONDE E GAUSS

A solução da equação algébrica de 4ª ordem era já conhecida desde 1545 quando foi publicada por Cardano sem a autorização do seu estudante e descobridor Lodovico Ferrari.⁵ O génio de Vandermond e Lagrange foi o de reconhecer que o que diferenciava a solubilidade das equações algébricas

$$(1-8) \quad \mathcal{P}_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

de grau $n \leq 4$ da (crescente suspeita de) insolubilidade⁶ das de grau superior era a existência de funções racionais simples das suas raízes em combinações $\beta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que exibiam certas invariâncias quando se permutava a ordem dos seus argumentos. Quando as $n!$ permutações das raízes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ geram um número $m < n$ de expressões distintas inferior à ordem n da equação a resolver,⁷

$$y_1(x_i) = \beta(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \rightarrow \quad \sigma_k = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_n} \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad y_k(x_i) = \beta(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$$

é possível determinar uma equação algébrica de ordem m , designada **EQUAÇÃO RESOLVENTE** da original

$$(1-9) \quad \mathcal{R}_n(y) = y^m + b_1y^{m-1} + \dots + b_{m-1}y + b_m = 0,$$

com coeficientes $b = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ funções dos originais $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, cujas raízes $Y_k(b)$ são precisamente os valores das m expressões “resolventes”

$$(1-10) \quad y_k(x_i) = Y_k(b) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

Estas, em conjunto com alguns constrangimentos sobre as raízes,⁸ permitem assim determinar as raízes x_k da equação polinomial (1-8).

⁵ - embora justiça seja feita que na sua extensa obra Cardano referencia e dá explicitamente crédito aos descobridores das fórmulas que escreve.

⁶ - A primeira tentativa de prova da insolubilidade das equações algébricas de grau igual ou superior a 5 data de 1799 por Paolo Ruffini na sua “Teoria Generale delle Equazioni”. Esta prova de 516 páginas foi geralmente pouco aceite pelos matemáticos da época, e embora Ruffini tenha submetido um artigo consideravelmente mais claro em 1810 à Academia Francesa de Ciências, os referees (Lagrange, Lacroix e Legendre) levaram tanto tempo a dar uma resposta que Ruffini escreveu ao presidente da Academia para retirar o artigo submetido. A prova hoje considerada definitiva da insolubilidade por radicais da equação algébrica geral de grau superior a 5 é a de Niels-Henrik Abel em 1824.

⁷ - A notação $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \dots & x_{i_n} \end{pmatrix}$ representa uma permutação em que se fazem as substituições $x_1 \rightarrow x_{i_1}, x_2 \rightarrow x_{i_2}, \dots, x_n \rightarrow x_{i_n}$, onde os n índices não têm repetições $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n$.

⁸ - Se $\mathcal{P}_n(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i} = 0$ então os coeficientes $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e as raízes x_1, x_2, \dots, x_n relacionam-se através de

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad ; \quad a_2 = \sum_{i < j} x_i x_j \quad ; \quad a_3 = - \sum_{i < j < k} x_j x_j x_k \quad ; \quad \dots \quad a_n = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$$

o que é fácil de verificar expandindo $\mathcal{P}_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$.

► **OS RESOLVENTES DE LAGRANGE**

Lagrange foi o primeiro a notar que uma combinação particular de produtos das raízes $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de um polinómio de grau n e sucessivas potências ζ_k^m de cada n^{a} raiz da unidade dava origem a funções do género de β acima descrito, e estabeleceu a expressão para os **RESOLVENTES**

$$(1-11) \quad \rho_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \zeta_k^i x_i$$

sendo os $\beta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \rho_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})^n$.

CASO $n = 3$

Por exemplo, para $n = 3$, lembrando (1-3) e as relações cíclicas entre raízes da unidade

$$\zeta_1^2 = \zeta_2 \quad ; \quad \zeta_2^2 = \zeta_1 \quad ; \quad \zeta_1^3 = \zeta_2^3 = \zeta_3 = 1$$

os resolventes (1-43) e as potências ρ_k^n tomam os seguintes valores para todas as 3! permutações dos seus argumentos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$:

k	$\rho_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$	$\rho_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})^3$
1, 2	$\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + x_3$	$6x_2 x_3 x_1 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\zeta_1(x_2 x_1^2 + x_3^2 x_1 + x_2^2 x_3) + 3\zeta_2(x_3 x_1^2 + x_2^2 x_1 + x_2 x_3^2)$
	$\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_3 + x_2$	
	$\zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_1 + x_3$	
	$\zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_3 + x_1$	
	$\zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_1 + x_2$	
	$\zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_2 + x_1$	
3	$x_1 + x_2 + x_3$	$(x_1 + x_2 + x_3)^3$

Verifica-se portanto que, apesar de existirem 6 valores diferentes para os ρ_k para $k = 1, 2$, apenas resultam duas expressões β distintas. Para $k = 3$ a expressão $\beta = \frac{1}{27}(x_1 + x_2 + x_3)^3$ é redundante porque $x_1 + x_2 + x_3 = a_1$. Assim, para uma cúbica escrita na sua forma irredutível $x^3 + ax - b = 0$ podemos deduzir da identidade geral

$$(1-12) \quad x^3 + ax - b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_3 x_2 + x_1 x_3)x - x_1 x_2 x_3$$

que a relação entre os coeficiente a , b e as raízes deve ser:

$$(1-13) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 x_2 + x_3 x_2 + x_1 x_3 = a \\ x_1 x_2 x_3 = b \end{cases}$$

A função ρ_3 é assim idênticamente nula, e as funções β podem típicamente ser escolhidas como duas expressões distintas

$$(1-14) \quad y_1(x_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \rho_1(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})^3 \quad ; \quad y_2(x_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \rho_2(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})^3$$

Estas são as expressões que vamos tomar como raízes de uma equação algébrica de grau 2

$$(1-15) \quad (y - y_1(x_i))(y - y_2(x_i)) = y^2 + Ay + B = 0$$

Por exemplo, usando $\rho_1 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + x_3$ e $\rho_2 = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_1 + x_3$ obtém-se

$$\begin{cases} A = -(y_1(x_i) + y_2(x_i)) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 (x_1 + x_2 - 2x_3)(2x_1 - x_2 - x_3)(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ B = y_1(x_i)y_2(x_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^6 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3))^3 \end{cases}$$

Substituindo agora aqui as equações (1-13) obtém-se finalmente que

$$(1-16) \quad \begin{cases} A = -b \\ B = -\frac{1}{27} a^3 \end{cases}$$

A EQUAÇÃO RESOLVENTE da cúbica é então

$$(1-17) \quad \mathcal{R}_3(y) = y^2 - by - \frac{1}{27} a^3 = 0$$

cujas soluções são

$$(1-18) \quad \begin{cases} Y_1(a, b) = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \\ Y_2(a, b) = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3} \end{cases}$$

De acordo com a escolha feita acima para $y_1(x_i)$ e $y_2(x_i)$ obtém-se então o sistema de três equações a três incógnitas

$$(1-19) \quad \begin{cases} \rho_1(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = 3Y_1(a, b)^{1/3} \\ \rho_2(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) = 3Y_2(a, b)^{1/3} \\ \rho_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

que pode ser resolvido facilmente em conjunto com (1-13) para obter as raízes x_k .

Quando se escolhe em (1-19) o par ρ_1, ρ_2 de uma das combinações

$$(1-20) \quad \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + x_3 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_1 + x_3 \end{cases} ; \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_3 + x_1 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_2 + x_1 \end{cases} ; \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_1 + x_2 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_3 + x_2 \end{cases}$$

obtém-se a solução válida para $a < 0$ e para $b > -2\left|\frac{a}{3}\right|^{3/2}$:

$$(1-21) \quad \begin{cases} x_1 = \zeta_1 Y_1(a, b)^{1/3} + \zeta_2 Y_2(a, b)^{1/3} \\ x_2 = \zeta_2 Y_1(a, b)^{1/3} + \zeta_1 Y_2(a, b)^{1/3} \\ x_3 = Y_1(a, b)^{1/3} + Y_2(a, b)^{1/3} \end{cases}$$

enquanto na região de coeficientes $a < 0$ e para $b \leq -2 \left| \frac{a}{3} \right|^{3/2}$ a solução é

$$(1-22) \quad \begin{cases} x_1 = \zeta_1 Y_1(a, b)^{1/3} + \zeta_1 Y_2(a, b)^{1/3} \\ x_2 = \zeta_2 Y_1(a, b)^{1/3} + Y_2(a, b)^{1/3} \\ x_3 = Y_1(a, b)^{1/3} + \zeta_2 Y_2(a, b)^{1/3} \end{cases}$$

resultando de usar em (1-19) uma das combinações

$$(1-23) \quad \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_1 + x_2 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_1 + x_3 \end{cases} ; \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + x_3 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_2 + x_1 \end{cases} ; \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_3 + x_1 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_3 + x_2 \end{cases}$$

Finalmente, cada combinação

$$(1-24) \quad \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_1 + x_2 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_3 + \zeta_2 x_2 + x_1 \end{cases} ; \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + x_3 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_3 + x_2 \end{cases} ; \begin{cases} \rho_1 = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_3 + x_1 \\ \rho_2 = \zeta_1 x_2 + \zeta_2 x_1 + x_3 \end{cases}$$

em (1-19) determina a solução válida para $a \geq 0$ e qualquer b

$$(1-25) \quad \begin{cases} x_1 = \zeta_1 Y_1(a, b)^{1/3} + Y_2(a, b)^{1/3} \\ x_2 = \zeta_2 Y_1(a, b)^{1/3} + \zeta_2 Y_2(a, b)^{1/3} \\ x_3 = Y_1(a, b)^{1/3} + \zeta_1 Y_2(a, b)^{1/3} \end{cases}$$

___CASO $n = 4$ ___

Para a quártica, à semelhança do que foi feito para a cúbica, vamos verificar que as raízes da equação

$$(1-26) \quad x^4 + ax^2 + bx = c$$

(à qual $\mathcal{P}_4(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$ pode ser sempre reduzida pela translação $x \rightarrow x - \frac{1}{4}a_1$) são determinadas a partir da solução de uma **EQUAÇÃO RESOLVENTE** de ordem 3.

De facto, com raízes da unidade de ordem 4 dadas por

$$\zeta_1 = i \quad ; \quad \zeta_2 = -1 \quad ; \quad \zeta_3 = -i \quad ; \quad \zeta_4 = 1$$

as permutações do quadrado do resolvente associado a ζ_2

$$(1-27) \quad \rho_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{k=1}^4 \zeta_2^k x_k = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4$$

dão já origem a apenas 3 funções distintas $\beta = \frac{1}{16} \rho_2(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})^2$ que designaremos

$$(1-28) \quad \begin{cases} y_1(x_i) = \frac{1}{16}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \\ y_2(x_i) = \frac{1}{16}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \\ y_3(x_i) = \frac{1}{16}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 \end{cases}$$

Assim, a equação resolvente da quártica deve ser

$$(1-29) \quad \mathcal{R}_4(y) = (y - y_1(x_i))(y - y_2(x_i))(y - y_3(x_i)) = y^3 + A y^2 + B y + C = 0$$

das quais os y_k em (1-28) são raízes. A determinação desta equação resolvente é feita eliminando os x_k das expressões relacionando os coeficientes de equações algébricas com as suas raízes

$$(1-30) \quad \begin{cases} y_1(x_i) + y_2(x_i) + y_3(x_i) = -A \\ y_1(x_i)y_2(x_i) + y_1(x_i)y_3(x_i) + y_2(x_i)y_3(x_i) = B \\ y_1(x_i)y_2(x_i)y_3(x_i) = -C \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = a \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -b \\ x_1x_2x_3x_4 = -c \end{cases}$$

determinando assim os coeficientes $A(a, b, c)$, $B(a, b, c)$ e $C(a, b, c)$.

$$(1-31) \quad A = \frac{a}{2} \quad ; \quad B = \frac{1}{16}(a^2 - 4c) \quad ; \quad C = -\frac{b^2}{64}$$

Uma vez determinadas as raízes $Y_k(a, b, c)$ da equação resolvente

$$(1-32) \quad \mathcal{R}_4(y) = y^3 + \frac{a}{2}y^2 + \frac{1}{16}(a^2 - 4c)y - \frac{b^2}{64} = 0$$

em função dos coeficientes a, b, c , a sua substituição em (1-28) determina os valores dos x_i em dois conjuntos (conforme se escolhe o sinal de $\rho_k = \pm 4 Y_k(a, b, c)^{1/2}$) válidos para domínios diferentes dos coeficientes.

$$(1-33) \quad \begin{cases} x_1 = -Y_1^{1/2} - Y_2^{1/2} - Y_3^{1/2} \\ x_2 = Y_1^{1/2} + Y_2^{1/2} - Y_3^{1/2} \\ x_3 = Y_1^{1/2} - Y_2^{1/2} + Y_3^{1/2} \\ x_4 = -Y_1^{1/2} + Y_2^{1/2} + Y_3^{1/2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x_1 = Y_1^{1/2} - Y_2^{1/2} - Y_3^{1/2} \\ x_2 = -Y_1^{1/2} + Y_2^{1/2} - Y_3^{1/2} \\ x_3 = -Y_1^{1/2} - Y_2^{1/2} + Y_3^{1/2} \\ x_4 = Y_1^{1/2} + Y_2^{1/2} + Y_3^{1/2} \end{cases}$$

É útil aqui notar que as equações resolventes não são únicas, mas dependem da escolha de funções invariantes β . No caso que tratámos poder-se-ia igualmente (e historicamente) ter escolhido uma função $\beta = x_1x_2 + x_3x_4$ que perante as 24 permutações possíveis apenas toma os três valores

$$(1-34) \quad \begin{cases} y_1(x_i) = x_1x_2 + x_3x_4 \\ y_2(x_i) = x_1x_3 + x_2x_4 \\ y_3(x_i) = x_2x_3 + x_1x_4 \end{cases}$$

Usando estas expressões para determinar a equação resolvente conduz às expressões dos coeficientes

$$(1-35) \quad A = -a \quad ; \quad B = -4c \quad ; \quad C = 4ac - b^2$$

i.e. à equação resolvente

$$(1-36) \quad \mathcal{R}_4(y) = y^3 - a y^2 - 4 c y + 4 a c - b^2 = 0$$

A determinação das raízes $Y_k(a, b, c)$ desta cúbica permite resolver o sistema

$$(1-37) \quad \begin{cases} x_1x_2 + x_3x_4 = Y_1(a, b, c) \\ x_1x_3 + x_2x_4 = Y_2(a, b, c) \\ x_2x_3 + x_1x_4 = Y_3(a, b, c) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

para obtenção das raízes x_i . De facto basta apenas determinar uma raiz $Y_1(a, b, c)$ de **(1-36)** tal que $Y_1 - a \neq 0$ para se determinar completamente a solução pretendida da quártica.

Note que subtraindo a $y_1(x_i)$ a expressão de a em **(1-30)** e utilizando $(x_1 + x_2) = -(x_3 + x_4)$, se obtém

$$y_1(x_i) - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) = (x_3 + x_4)^2 = Y_1 - a.$$

Podemos assim escrever

$$(1-38) \quad x_3 + x_4 = \pm \sqrt{Y_1 - a} \quad ; \quad x_1 + x_2 = \mp \sqrt{Y_1 - a}$$

Usando seguidamente a expressão de b na forma $x_1 x_2(x_3 + x_4) + x_3 x_4(x_1 + x_2) = -b$ obtém-se

$$x_1 x_2 - x_3 x_4 = \mp \frac{b}{\sqrt{Y_1 - a}}$$

que em conjunto com

$$y_1(x_i) = x_1 x_2 + x_3 x_4 = Y_1$$

permite determinar os produtos

$$(1-39) \quad x_1 x_2 = \frac{1}{2} \left(Y_1 \mp \frac{b}{\sqrt{Y_1 - a}} \right) \quad ; \quad x_3 x_4 = \frac{1}{2} \left(Y_1 \pm \frac{b}{\sqrt{Y_1 - a}} \right)$$

A primeira destas expressões permite escrever

$$x_2 = \frac{1}{2x_1} \left(Y_1 \mp \frac{b}{\sqrt{Y_1 - a}} \right)$$

o que, substituída na segunda expressão de **(1-38)**, determina as equações

$$(1-40) \quad \begin{cases} x_1^2 + \sqrt{Y_1 - a} x_1 + \frac{1}{2} \left(Y_1 - \frac{b}{\sqrt{Y_1 - a}} \right) = 0 \\ x_1^2 - \sqrt{Y_1 - a} x_1 + \frac{1}{2} \left(Y_1 + \frac{b}{\sqrt{Y_1 - a}} \right) = 0 \end{cases}$$

As quatro raízes destas duas equações **(1-40)** incluem todas as raízes da quártica em função duma raiz Y_1 da equação resolvente **(1-36)**

$$(1-41) \quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{Y_1 - a} + i \sqrt{Y_1 + a - \frac{2b}{\sqrt{Y_1 - a}}} \right) \\ x_2 = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{Y_1 - a} - i \sqrt{Y_1 + a - \frac{2b}{\sqrt{Y_1 - a}}} \right) \\ x_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{Y_1 - a} + i \sqrt{Y_1 + a + \frac{2b}{\sqrt{Y_1 - a}}} \right) \\ x_4 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{Y_1 - a} - i \sqrt{Y_1 + a + \frac{2b}{\sqrt{Y_1 - a}}} \right) \end{cases}$$

Infelizmente, para $n = 5$ o menor número de funções β não triviais que se consegue associadas às permutações dos argumentos dos resolventes é $m = 24$, o que obviamente torna impossível a aplicação das técnicas acima reproduzidas.

O método de Lagrange evidencia assim a primeira utilização de grupos de permutação de n objectos (que iremos designar de **GRUPO SIMÉTRICO** S_n), e embora não usasse explicitamente estes conceitos, Lagrange demonstrou que, dada qualquer função racional de n variáveis $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, o número de valores distintos que \mathcal{F} toma quando os seus argumentos são permutados entre si é

$$m = \frac{|S_n|}{|\mathcal{I}_{\mathcal{F}}|}$$

onde

- (i) $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \subset S_n$ representa o **SUB-GRUPO DE ISOTROPIA** de \mathcal{F} , ou seja o conjunto de permutações dos $\{x_i\}$ que deixam \mathcal{F} invariante: $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{F}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.
- (ii) $|S_n| = n!$ e $|\mathcal{I}_{\mathcal{F}}|$ representam o número de elementos em cada um destes conjuntos (i.e. a **ORDEM** do grupo ou sub-grupo).

O teorema hoje conhecido em teoria de grupos como **TEOREMA DE LAGRANGE** afirma precisamente que a ordem de qualquer sub-grupo H de um grupo G é um divisor da ordem deste, ou seja $\frac{|G|}{|H|} \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, para todo o sub-grupo $H \subset S_n$ existem funções racionais $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tais que $H \equiv \mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.

É assim já implícito no trabalho de Lagrange que um método geral de determinação de raízes polinomiais por radicais depende da estrutura dos sub-grupos do grupo Simétrico S_n . Contudo a formalização destes conceitos deverá esperar até que Galois escreva a sua teoria de equações algébricas em 1831, trabalho esse que só será publicado em 1846.

► VANDERMONDE, GAUSS E AS EQUAÇÕES CICLOTÓMICAS

Vandermonde usou de maneira menos organizada idéias semelhantes às de Lagrange, de quem era contemporâneo, na resolução por radicais de equações algébricas. Em particular, formalizou a idéia de que uma expressão algébrica para as raízes de polinómios devia ser necessariamente ambígua porque a enumeração das raízes é arbitrária. Por isso deverá existir uma expressão $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ envolvendo as raízes x_k e seus radicais que tenha as seguintes propriedades:

- i. Dependendo da escolha dos radicais nesta expressão, $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ determina cada uma das raízes x_k .
- ii. A expressão $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pode ser escrita exclusivamente em termos dos coeficientes do polinómio original $\mathcal{P}_n(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$ (ou seja $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{G}(a_1, a_2, \dots, a_n)$) através das relações simétricas
 $a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$; $a_2 = \sum_{i<j} x_i x_j$; $a_3 = - \sum_{i<j<k} x_j x_j x_k$; ... $a_n = (-1)^n x_1 x_2 \dots x_n$
- iii. A expressão $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é de facto invariante para qualquer permutação das raízes entre si, ou seja $\mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{F}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$.

Vandermonde determina então explicitamente a forma desta expressão para $n \leq 4$ como

$$(1-42) \quad \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{k=1}^{n-1} y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)^{1/n}$$

onde os $y_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^n \rho_k(x_1, x_2, \dots, x_n)^n$ são as funções β anteriormente associadas aos resolventes de Lagrange

$$(1-43) \quad \rho_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \zeta_k^i x_i$$

com ζ_k uma n -raiz da unidade. A ambiguidade na escolha das raízes $1/n$ em (1-42) significa que se escolhermos consistentemente j em todos os

$$(1-44) \quad y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)^{1/n} = \zeta_k^{-j} \frac{1}{n} \rho_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \left(x_j + \sum_{i \neq j} \zeta_k^{i-j} x_i \right)$$

obtem-se de (1-42), trocando a ordem dos somatórios em $i \neq j$ e k ,

$$(1-45) \quad \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n-1}{n} x_j + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j}^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \zeta_k^{i-j} \right) x_i$$

As potências ζ_k^{i-j} são também n^{a} -raízes da unidade e, dado que $|i-j| < n$, verificam

$$\zeta_k^{i-j} = \zeta_k^{\pm|i-j|} = \left(\zeta_{|i-j|} \right)^{\pm k}.$$

Mas então

$$(1-46) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_k^{i-j} = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\zeta_{|i-j|} \right)^{\pm k} = -1.$$

De facto $\zeta_{|i-j|}^k \neq 1$ para $i \neq j$ e $|i-j| < n$, portanto os $\zeta_{|i-j|}^k$ são soluções da equação ciclotômica

$$(1-47) \quad \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = 0$$

pelo que verificam (1-46).

Conclui-se assim que (1-42) deve dar para cada j fixo em (1-44)

$$(1-48) \quad \mathcal{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_j - \frac{1}{n} \sum_{i \neq j}^n x_i = x_j$$

Para $n = 2$, $\mathcal{P}_2(x) = x^2 + a_1 x + a_2 = 0$, as raízes da unidade são $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 1$. O resolvente

$$(1-49) \quad \rho_1(x_1, x_2) = \zeta_1 x_1 + \zeta_1^2 x_2 = x_2 - x_1$$

Tendo em conta que $x_1 + x_2 = -a_1$, $x_1 x_2 = a_2$ e $x_1^2 + x_2^2 = a_1^2 - 2a_2$, expressão de Vandermond é

$$(1-50) \quad \mathcal{F}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \left(\frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \left(a_1 + \zeta_1^{-j} \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \right)$$

Acontece contudo que a escolha dos $y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em (1-42) como potências de resolventes de Lagrange (1-43) só funciona para $n < 5$ já que as permutações de raízes em $y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dão origem a precisamente $n-1$ destas funções nestes casos. Quando $n \geq 5$ tal já não acontece, e a determinação explícita das funções de Vandermond fica assim comprometida. A formulação de Vandermond tem no entanto o grande mérito de salientar o papel importante das n^{a} -raízes da unidade na determinação das raízes de equações algébricas, e em particular mostrar que, se existir uma expressão racional explícita para $y_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ em (1-42) para um dado n , as soluções assim determinadas são expressas em termos de radicais desde que as n^{a} -raízes ζ_k o sejam.

Dada a dificuldade de solução de equações algébricas de grau superior a quatro, as atenções viram-se por esta altura para o estudo das condições para as quais as equações de grau superior têm soluções por radicais. Em particular Vandermonde e Gauss estudaram as soluções de **EQUAÇÕES CICLOTÓMICAS**⁹

$$(1-51) \quad x^n - 1 = 0$$

⁹ - Esta designação significa "divisão da circunferência" já que as suas raízes representam os vértices de um polígono regular inscrito sobre uma circunferência unitária no plano complexo.

As soluções das equações ciclotómicas do tipo **(1-51)** denominam-se **n -RAÍZES DA UNIDADE** e denotá-las-emos por ζ_k , ($k = 1, 2, \dots, n$). Já tivemos oportunidade de ver a sua importância na determinação de raízes algébricas nas secções anteriores.¹⁰ Se n não for primo, as n -raízes da unidade podem ser expressas por radicais se para cada factor primo p de n for possível exprimir as p -raízes da unidade por radicais. Resta assim estudar as soluções por radicais das equações ciclotómicas $x^p - 1 = 0$ com p primo.¹¹ Como $\zeta_p = 1$ é sempre uma p -raíz, pode-se excluí-la pela divisão

$$(1-52) \quad \frac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1 = 0$$

Note-se que esta equação deve ser uma identidade para $x = \zeta_k$ uma p -raíz da unidade, isto é uma vez que para p primo se tem $\zeta_k = \zeta_1^k$ a equação **(1-52)** demonstra a relação genérica entre p -raízes da unidade

$$(1-53) \quad 1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{p-1} = 0$$

Esta equação **(1-52)** de grau par $p - 1$ pode ser reduzida a uma equação de grau $q = \frac{p-1}{2}$ introduzindo uma nova variável¹² $Y = x + \frac{1}{x} = \xi + \eta$, com $\xi = x$ e $\eta = x^{-1}$. Dividindo o polinómio **(1-52)** por $x^q = x^{\frac{p-1}{2}}$ obtemos, em termos de ξ e η ,

$$\xi^q + \dots + \xi^2 + \xi + 1 + \eta + \eta^2 + \dots + \eta^q = 0.$$

A sequência de potências de $Y = \xi + \eta$, tendo em conta que $\xi^m \eta^n = \begin{cases} \xi^{m-n} & \text{se } m \geq n \\ \eta^{n-m} & \text{se } n \geq m \end{cases}$ é dada pela expansão binomial

$$\begin{cases} Y = \xi + \eta \\ Y^2 = 2 + \xi^2 + \eta^2 \\ Y^3 = 3(\xi + \eta) + (\xi^3 + \eta^3) \\ Y^4 = 6 + 4(\xi^2 + \eta^2) + (\xi^4 + \eta^4) \\ \vdots \\ Y^q = \binom{q}{\frac{q}{2}} + \binom{q}{\frac{q}{2}-1}(\xi^2 + \eta^2) + \dots + (\xi^q + \eta^q) \end{cases}$$

Resolvendo um sistema linear com base nas potências de ξ e η a partir da identidade

$$(1-54) \quad \begin{aligned} 1 + (\xi + \eta) + (\xi^2 + \eta^2) + \dots + (\xi^{q-1} + \eta^{q-1}) + (\xi^q + \eta^q) &= A_0 + A_1 Y + A_2 Y^2 + \dots + A_q Y^q = \\ &= A_0 + 2A_2 + 6A_4 + \dots + \binom{q}{\frac{q}{2}} A_q + (\xi + \eta) \left(A_1 + 3A_3 + 10A_5 + \dots + \binom{q-1}{\frac{q}{2}-1} A_{q-1} \right) + \\ &\quad + (\xi^2 + \eta^2) \left(A_2 + 4A_4 + 15A_6 + \dots + \binom{q}{\frac{q}{2}-1} A_q \right) + \dots + (\xi^{q-1} + \eta^{q-1}) A_{q-1} + (\xi^q + \eta^q) A_q \end{aligned}$$

¹⁰ - Por exemplo, dado um número complexo $c \in \mathbb{C}$ é possível obter todas as n raízes x_k de equações binomiais do tipo $x^n - c = 0$ a partir de qualquer uma delas x_n já que se verifica $x_k = \zeta_k x_n$ onde $\zeta_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ é uma n -raíz da unidade.

¹¹ - No caso de n não ser primo deve-se ter $n = pq$ onde p é um factor primo. Então $(x^q)^p - 1 = 0$ é da forma desejada.

¹² - Um truque devido a de Moivre.

obtem-se o sistema de equações nas incógnitas A_1, A_2, \dots, A_q que se determinam resolvendo

$$\begin{aligned} A_q &= 1 & A_{q-1} &= 1 \\ A_{q-2} &= 1 - q A_q & A_{q-3} &= 1 - (q-1) A_{q-1} \\ &\vdots & &\vdots \\ A_2 &= 1 - 4A_4 - 15A_6 - \dots - \binom{q}{\frac{q}{2}-1} A_q & A_1 &= 1 - 3A_3 - 10A_5 - \dots - \binom{q-1}{\frac{q}{2}-1} A_{q-1} \\ A_0 &= 1 - 2A_2 - 6A_4 - \dots - \binom{q}{2} A_q \end{aligned}$$

Para p primo até 11 as correspondentes equações são ¹³

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 = 0 &\Leftrightarrow 1 + Y = 0 \\ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0 &\Leftrightarrow -1 + Y + Y^2 = 0 \\ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = 0 &\Leftrightarrow -1 - 2Y + Y^2 + Y^3 = 0 \\ 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} = 0 &\Leftrightarrow 1 + 3Y - 3Y^2 - 4Y^3 + Y^4 + Y^5 = 0 \end{aligned}$$

Um importante resultado do trabalho de Vandermonde foi a construção de soluções por radicais da equação ciclotômica para $p = 11$, o que significa que neste caso particular a equação reduzida de grau $q = \frac{p-1}{2} = 5$ tem uma solução por radicais.

Em geral, Vandermonde propõe-se encontrar $m < p$ funções simétricas racionais $\beta_i(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_p)$ das $\sqrt[p]{p}$ -raízes da unidade ζ_k ($k = 1, 2, \dots, p$), o que implica que os β_i sejam raízes de uma equação algébrica de grau m com coeficientes racionais.

► RAÍZES DA UNIDADE

Em geral, as raízes da equação $x^n = 1$ com n inteiro positivo designam-se **n -RAÍZES DA UNIDADE**. Em particular, $\zeta_1^{(n)} = e^{2\pi i \frac{1}{n}}$ designa-se uma **n -RAÍZ PRIMITIVA**(da unidade) porque as suas potências $x_k = \zeta_1^{(n)k}$ geram todas as $\sqrt[n]{n}$ -raízes da unidade quando $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Iremos mostrar adiante que as $\sqrt[n]{n}$ -raízes da unidade formam uma **REPRESENTAÇÃO IRREDUTÍVEL** do grupo cíclico \mathbb{Z}_n .

Contudo, se existirem outros naturais $d < n$ que sejam **CO-PRIMOS** ¹⁴ de n , então $\zeta_d^{(n)} = e^{2\pi i \frac{d}{n}}$ também gera por potenciação todas as outras raízes x_k e portanto também é uma $\sqrt[n]{n}$ -raíz primitiva. Por exemplo,

Para $n = 1$: a única raíz $\{+1\}$ é a $\sqrt[1]{1}$ -raíz primitiva $\zeta_1^{(1)} = 1$.

Para $n = 2$: as raízes são $\{+1, -1\}$ e a $\sqrt[2]{2}$ -raíz primitiva é $\zeta_1^{(2)} = -1$.

Para $n = 3$: as raízes são $\left\{1, -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$ sendo neste caso $\zeta_1^{(3)} = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \equiv e^{2\pi i \frac{1}{3}}$ e também $\zeta_2^{(3)} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \equiv e^{2\pi i \frac{2}{3}}$ ambas $\sqrt[3]{3}$ -raízes primitivas.

Para $n = 4$: as raízes são $\{+1, +i, -1, -i\}$. A raíz $\zeta_1^{(4)} = +i \equiv e^{2\pi i \frac{1}{4}}$ e adicionalmente $\zeta_3^{(4)} = -i \equiv e^{2\pi i \frac{3}{4}}$ são $\sqrt[4]{4}$ -raízes primitivas.

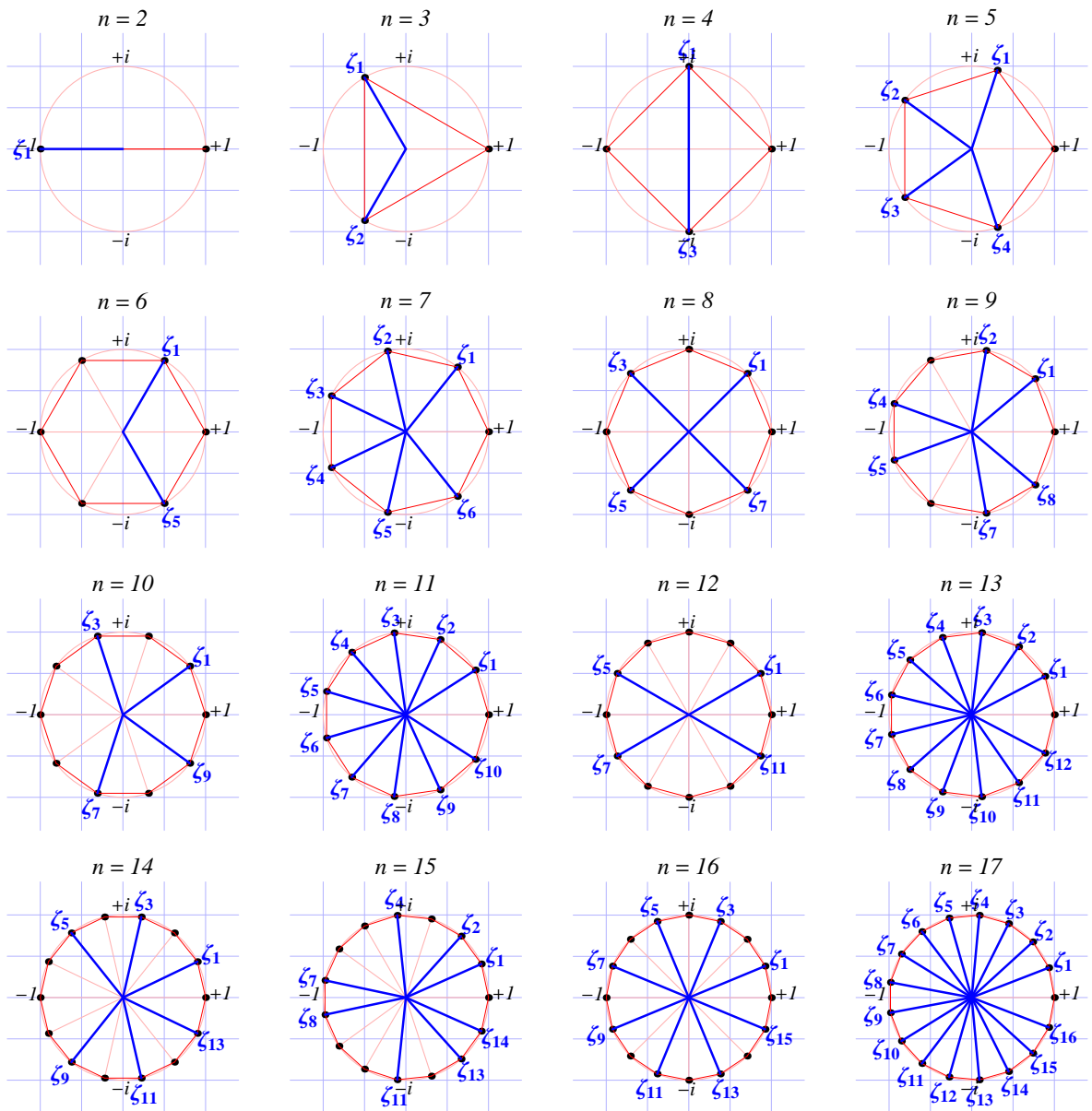
¹³ - Por cada raíz Y da equação reduzida obtém-se naturalmente duas raízes $x = \frac{1}{2}(Y \pm \sqrt{Y^2 - 4})$ da equação original.

¹⁴ - Dois inteiros d e n são co-primos se $\text{mdc}(d, n) = 1$ é o maior divisor comum de d e n .

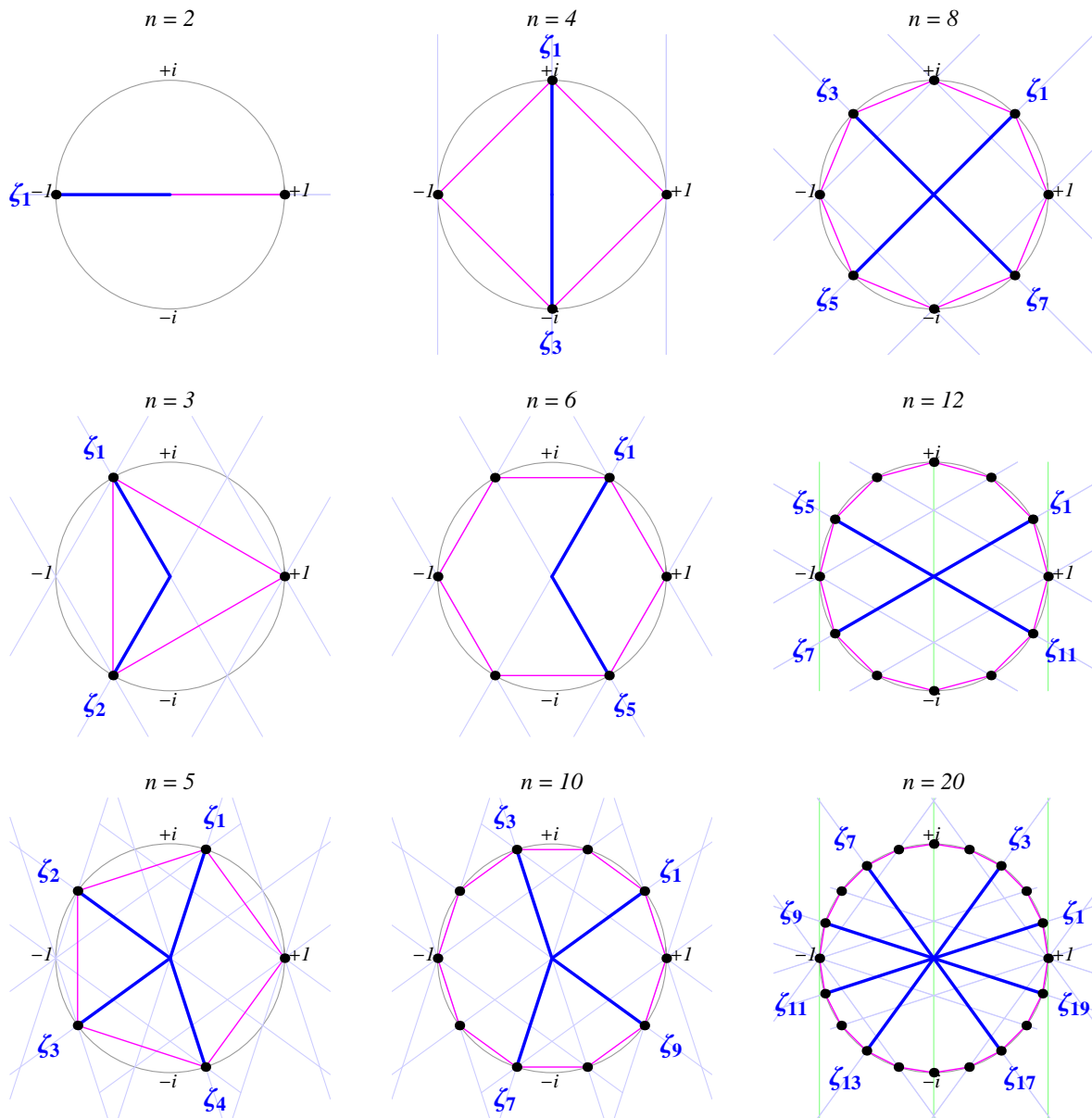
Para $n \geq 2$ todas as n -raízes da unidade têm soma nula como se pode ver geometricamente no plano complexo: sendo as raízes pontos sobre a circunferência de raio unidade que definem um polígono regular centrado na origem, a sua soma representa o “centro de massa” do polígono que é a origem. Assim

$$(1-55) \quad \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \frac{k}{n}} = 0 \quad \iff \quad 1 + \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_{n-1} = 0$$

A imagem seguinte mostra a distribuição das n -raízes da unidade e respectivas n -raízes primitivas até $n = 17$. Note-se que a determinação destas raízes equivale à construção de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência. Desde a antiguidade clássica que se conheciam métodos envolvendo apenas régua e compasso para construir polígonos de 2^k , $2^k \times 3$, $2^k \times 5$ com k um inteiro não negativo, e pensava-se que mais nenhum poderia ser construído assim. Após mais de 2000 anos, Gauss foi o primeiro a demonstrar em 1796 que um polígono de 17 lados podia ser construído: de facto foi mais longe mostrando que, para n primo, um polígono de n lados pode ser construído apenas com régua e compasso se $n - 1$ contém apenas potências de 2 na sua decomposição em primos. Estão nesta condição os primos $n = 3, 5, 17, 257, \dots$. O seu raciocínio envolve o cálculo das raízes do polinómio ciclotómico correspondente, e o resultado deve-se ao facto de apenas aparecerem nos casos mencionados apenas equações de grau 2 que permitem construir sucessivamente as raízes em termos dos seus coeficientes.



Podemos ver que, no caso dos polígonos passíveis de construção puramente geométrica, a malha obtida por extensão das raízes primitivas a um anel de combinações com coeficientes racionais permite obter todas as raízes.



n -raízes primitivas da unidade ζ_k para as seqüências de múltiplos $n = 2^k p$ com $p = 1, 3, 5$ primo. A respectiva malha para cada um destes casos permite a reconstrução de todas as n -raízes da unidade apenas com régua e compasso.

Gauss mostrou em 1801 que as raízes destas equações ciclotômicas podem ser expressas a partir das raízes de uma seqüência de equações algébricas de menor grau m , sendo m um factor primo¹⁵ de $n - 1$, as quais podem ser resolvidas por radicais.

¹⁵ - Teorema Fundamental da Aritmética (Gauss-1801): Qualquer inteiro maior que 1 pode escrever-se de maneira única como o produto de números primos.

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra é possível decompor qualquer polinómio sobre \mathbb{C} num produto sobre as suas raízes

$$(1-56) \quad x^n - 1 = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$$

Cada n -raiz da unidade $x_k = e^{2\pi i \frac{k}{n}}$ é uma q -raiz primitiva para um único divisor positivo q de n porque:

- se n e k são co-primos, então $x_k = \zeta_k^{(n)}$ já é primitiva ($q = n$).
- se n e k não são co-primos têm um máximo divisor comum $m > 1$, e então $\frac{k}{n} = \frac{ms}{mq} = \frac{s}{q}$ pelo que s e q são co-primos e $x_k = \zeta_s^{(q)}$ é uma q -raiz primitiva ($\frac{n}{q} = mdc(k, n)$).

Se agruparmos no produto os monómios $(x - x_k)$ para os quais x_k é uma q -raiz primitiva (e há precisamente $\varphi(q)$ dessas)¹⁶ obtemos os **POLINÓMIOS CICLOTÓMICOS DE ORDEM q**

$$(1-57) \quad \Phi_q(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(q)} (x - \zeta_{d_i}^{(q)}) \quad ; \quad (d_i = \text{co-primo inferior de } q)$$

Assim (1-56) escreve-se (assumindo doravante apenas divisores positivos)

$$(1-58) \quad x^n - 1 = \prod_{q|n} \Phi_q(x) \quad ; \quad (q|n = q \text{ divisor de } n)$$

Usando a **FORMULA DE INVERSÃO DE MÖBIUS** é possível escrever esta expressão (1-58) como uma soma sobre os divisores m de n

$$(1-59) \quad \Phi_n(x) = \prod_{m|n} (1 - x^{\frac{n}{m}})^{\mu(m)}$$

onde $\mu(m)$ designa a **FUNÇÃO DE MÖBIUS**.

► **TRANSFORMADA DE MÖBIUS**

A **TRANSFORMADA DE MÖBIUS**(ou **INVERSO DE MÖBIUS**) de uma função aritmética $f(n)$ (i.e. uma função complexa sobre os inteiros positivos) é definida como

$$(1-60) \quad (f * \mu)(n) = \sum_{q|n} f(q) \mu\left(\frac{n}{q}\right) \equiv \sum_{q|n} f\left(\frac{n}{q}\right) \mu(q) = (\mu * f)(n)$$

onde $\mu(q)$ designa a **FUNÇÃO DE MÖBIUS** clássica

$$(1-61) \quad \mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n \text{ tem qualquer factor primo repetido} \\ (-1)^k & \text{se } n \text{ tem todos os } k \text{ factores primos distintos} \end{cases}$$

¹⁶ - $\varphi(q)$ é a **FUNÇÃO φ DE EULER** designando o número de co-primos inferiores positivos de q . Por exemplo, $\varphi(8) = 4$ porque só 1, 3, 5, 7 são co-primos positivos de 8, inferiores a 8.

Esta função verifica $\sum_{q|n} \mu(q) = \delta_{n1}$.¹⁷ Assim, se tivermos uma relação entre duas funções aritméticas f e g na forma

$$(1-63) \quad f(m) = \sum_{p|m} g(p)$$

é possível obter $g(n)$ usando a **FÓRMULA DE INVERSÃO DE MÖBIUS**

$$(1-64) \quad (\mu * f)(n) = \sum_{q|n} \sum_{p|\frac{n}{q}} g(p) \mu(q) = \sum_{p|n} g(p) \sum_{q|\frac{n}{p}} \mu(q) = g(n)$$

1 = 1	$\mu(1) = 1$	11 = 11	$\mu(11) = -1$	21 = 3 × 7	$\mu(21) = 1$
2 = 2	$\mu(2) = -1$	12 = 2 ² × 3	$\mu(12) = 0$	22 = 2 × 11	$\mu(22) = 1$
3 = 3	$\mu(3) = -1$	13 = 13	$\mu(13) = -1$	23 = 23	$\mu(23) = -1$
4 = 2 ²	$\mu(4) = 0$	14 = 2 × 7	$\mu(14) = 1$	24 = 2 ³ × 3	$\mu(24) = 0$
5 = 5	$\mu(5) = -1$	15 = 3 × 5	$\mu(15) = 1$	25 = 5 ²	$\mu(25) = 0$
6 = 2 × 3	$\mu(6) = 1$	16 = 2 ⁴	$\mu(16) = 0$	26 = 2 × 13	$\mu(26) = 1$
7 = 7	$\mu(7) = -1$	17 = 17	$\mu(17) = -1$	27 = 3 ³	$\mu(27) = 0$
8 = 2 ³	$\mu(8) = 0$	18 = 2 × 3 ²	$\mu(18) = 0$	28 = 2 ² × 7	$\mu(28) = 0$
9 = 3 ²	$\mu(9) = 0$	19 = 19	$\mu(19) = -1$	29 = 29	$\mu(29) = -1$
10 = 2 × 5	$\mu(10) = 1$	20 = 2 ² × 5	$\mu(20) = 0$	30 = 2 × 3 × 5	$\mu(30) = -1$

Função de Möbius para os primeiros 30 inteiros positivos. $\mu(n) = \pm 1$ se n tiver um número par (+) ou ímpar (-) de factores primos sem repetições, $\mu(n) = 0$ se n se decompõe em factores primos com repetições.

IV – SÉCULO XIX, ABEL E GALOIS

Em 1826 Abel demonstrou a impossibilidade de resolver através de radicais equações algébricas de grau superior a quatro. O seu trabalho centrou-se posteriormente nas denominadas **EQUAÇÕES ABELIANAS**, as quais podem ser resolvidas por radicais. De facto as raízes das equações abelianas são funções racionais $f_k(x_1)$ de uma mesma raíz x_1 .¹⁸

Este resultado mostra que algumas equações de grau elevado podem ser resolvidas por radicais. É também produto deste matemático a introdução em 1829 da noção de **CORPO** e de **POLINÓMIO IRREDUTÍVEL** num determinado corpo. Um polinómio com coeficientes num corpo \mathbb{K} diz-se **REDUTÍVEL** (nesse corpo) se puder exprimir-se como o produto de dois polinómios de grau inferior com coeficientes no mesmo corpo \mathbb{K} . Se tal não fôr possível, o polinómio é irredutível para esse corpo.

¹⁷ - Se a factorização em primos de $n > 1$ contém (eventualmente com repetições) N factores distintos, alguns divisores de n formam-se fazendo produtos de k desses factores sem repetições, havendo $\binom{N}{k}$ divisores distintos $q(k)$ deste tipo, contribuindo cada um com $\mu(q(k)) = (-1)^k$ para o somatório. Os restantes divisores q de n são produtos de factores com repetições e $\mu(q) = 0$ para esses, portanto têm contribuição nula para o somatório. Finalmente 1 é um divisor de n com $\mu(1) = 1$ por definição. Assim obtemos, sempre que $n > 1$,

$$(1-62) \quad \sum_{q|n} \mu(q) = 1 + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} (-1)^k = (1-1)^N = 0 \quad \blacksquare$$

¹⁸ - Adicionalmente é requerido que se verifique a condição $f_k(f_i(x_1)) = f_i(f_k(x_1))$.

1.2 Grupos e Geometrias

A Geometria Diferencial ocupa hoje o lugar do Cálculo Infinitesimal do século XVII, já que as suas ferramentas aparecem como as mais adequadas para descrever a realidade física a todas as escalas, desde a do interior do próton à do modelo do Universo. Pode-se começar a perceber as razões desta afirmação se entendermos que a definição de **OBJECTIVIDADE FÍSICA**, manifesto de uma realidade independente do observador, não pode ser completamente dada pelas determinações de um observador, e tem mesmo que transcender o simples acumular das perspectivas de vários observadores. É antes no **RELACIONAMENTO** dessas perspectivas, isto é na determinação de **FACTORES COMUNS** a todas elas, que se deve encontrar uma melhor caracterização e compreensão da realidade.

A Geometria, e em particular a Geometria Diferencial, proporciona uma linguagem e metodologia que incorporam este princípio: o objecto geométrico, definido como uma classe de equivalência das suas **DETERMINAÇÕES** modulo uma relação \mathcal{R} (dependente do **REFERENCIAL** a que cada uma dessas determinações está associada), é justamente a expressão de **OBJECTIVIDADE** na descrição de uma realidade, e está na base das noções de **INVARIÂNCIA E RELATIVIDADE**.

Esta perspectiva, aplicada a objectos e espaços mais gerais que os considerados pelos géometras, permite estender este tipo de objectividade geométrica ao domínio da realidade física e vem possibilitar a utilização, neste estudo, dos métodos de análise global desenvolvidos na conexão entre topologia e geometria algébrica.

*Durante a Renascença, nas origens da teoria matemática da **PERSPECTIVA**, formula-se pela primeira vez um problema que dá **CLARAMENTE** expressão a estas idéias. A idéia básica do sistema de perspectiva criado pelos pintores era a de representar uma cena real através da **SECÇÃO PLANA** duma sua **PROJECCÃO**, constituída pelo conjunto de raios luminosos partindo de vários pontos da cena e convergindo para um ponto de observação. Leoni Battista Alberti (1404-72) foi um dos seus criadores e um dos primeiros a levantar o problema:*

QUAIS SÃO AS PROPRIEDADES COMUNS DE DUAS SECÇÕES DUMA MESMA PROJECCÃO DE UMA FIGURA REAL, OU DE SECÇÕES DE DUAS PROJECCÕES DIFERENTES DA MESMA FIGURA ?

*As respostas a esta questão só começaram e ser dadas no século XVII, vindo a culminar no século XIX na Geometria Projectiva e a classificação (Cayley-Klein) das suas sub-geometrias (a Geometria Afim e as geometrias métricas). Todas estas geometrias se podem associar com uma escolha do tipo de **TRANSFORMAÇÕES** admitidas entre observadores, e embora as transformações variem entre as geometrias consideradas, cada um destes conjuntos de transformações tem em comum a estrutura de **GRUPO**(conceito introduzido no século XIX por Evariste Galois). A definição moderna de Geometria, ou de **MÉTODO GEOMÉTRICO**, é a divulgada em 1872 por Felix Klein no seu "**PROGRAMA DE ERLANGEN**" como :*

O ESTUDO DAS PROPRIEDADES DAS "FIGURAS" QUE SE CONSERVAM QUANDO SE EFECTUAM SOBRE O ESPAÇO CERTAS TRANSFORMAÇÕES FORMANDO AQUILO A QUE CHAMAMOS UM GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES.

I – GEOMETRIA PROJECTIVA

Na **GEOMETRIA PROJECTIVA** em duas dimensões, por exemplo, os referenciais são constituídos por um plano e um ponto exterior (centro de perspectiva) e uma **TRANSFORMAÇÃO HOMOGRAFICA** traduz uma mudança de um ou ambos. Esta Geometria é o estudo dos invariantes das **COLINEAÇÕES** do plano (i.e. a transformação mais geral do plano que transforma rectas em rectas). As transformações podem-se escrever, em coordenadas não-homogéneas (x, y) , como

$$(1-65) \quad x' = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \quad ; \quad y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}$$

onde os a_{ij} são os coeficientes de uma matriz **A**, real e de determinante não-nulo. Introduzindo coordenadas homogéneas, i.e. x_1, x_2, x_3 tais que

$$x' = \frac{x_1}{x_3} \quad ; \quad y' = \frac{x_2}{x_3}$$

as equações das curvas tornam-se homogéneas e as transformações **(1-65)** ficam simplesmente

$$(1-66) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{x}' = \{x'^1, x'^2, x'^3\}$. Vemos pois que o grupo característico da Geometria Projectiva a n-dimensões é o grupo linear geral $GL(n+1, \mathbb{R})$ das matrizes invertíveis $(n+1) \times (n+1)$ reais: as propriedades invariantes desta geometria são, entre outras, a linearidade, a colinearidade, as razões anarmónicas de quatro pontos sobre uma recta ou o grau de uma curva algébrica.

II – GEOMETRIA AFIM

A **GEOMETRIA AFIM** n-dimensional resulta de restringir o grupo da Geometria Projectiva ao sub-grupo das **TRANSFORMAÇÕES AFINS**: algébricamente, estas transformações podem ser postas (em coordenadas não-homogéneas) na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}$$

onde agora $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{R})$, o **GRUPO ESPECIAL LINEAR** de dimensão n^2 .

Numa transformação afim, a imagem duma recta é ainda uma recta e o paralelismo entre rectas é preservado: no entanto, distâncias e ângulos (se definidos) não são invariantes desta geometria, que é útil no estudo da mecânica de deformações.

*A **GEOMETRIA AFIM** foi iniciada por Euler e por Möbius, que introduziu o conceito de COORDENADAS HOMOGÉNEAS em 1827: sendo dado um triângulo fixo, qualquer ponto P no seu plano pode ser referenciado pelas massas que devem ser colocadas nos vértices desse triângulo de forma que P seja o CENTRO DE GRAVIDADE DAS TRÊS MASSAS. Quando P é exterior ao triângulo, uma ou duas das massas têm de ser negativas. O mesmo esquema pode ser usado para pontos no espaço, usando-se um tetraedro e quatro coordenadas. É evidente que multiplicando as massas todas pela mesma constante não altera o seu centro de gravidade, e por isso as coordenadas homogéneas de Möbius não são únicas: só as suas razões estão bem definidas. Escrevendo as equações de curvas e superfícies algébricas neste sistema de coordenadas torna-as homogéneas, i.e. todos os termos têm o mesmo grau.*

III – GEOMETRIA MÉTRICA

Os grupos das **GEOMETRIAS MÉTRICAS** são, por sua vez, sub-grupos do da Geometria Afim, fazendo-se em todos os casos a restrição de $GL(n, \mathbb{R})$ ao sub-grupo $SL(n, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{Z}_2$ das matrizes **A** reais de determinante ± 1 . Estas geometrias são diferenciadas pelas formas quadráticas que se escolhem para definir uma medida de **DISTÂNCIA** e de **ÂNGULO**.

Em duas dimensões $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, as geometrias correspondentes às métricas dadas pelas expressões seguintes são:

$$(1-67) \quad g = \frac{4(dx^2 - \eta^2 dy^2)}{(1 + x^2 - \eta^2 y^2)^2} \iff \begin{cases} \text{ELÍPTICA} & : \eta^2 = -1 \\ \text{CO-EUCLIDEANA} & : \eta^2 = 0 \\ \text{CO-HIPERBÓLICA} & : \eta^2 = 1 \end{cases}$$

$$(1-68) \quad g = dx^2 - \eta^2 dy^2 \iff \begin{cases} \text{EUCLIDANA} & : \eta^2 = -1 \\ \text{GALILEANA} & : \eta^2 = 0 \\ \text{MINKOWSKIANA} & : \eta^2 = 1 \end{cases}$$

$$(1-69) \quad g = \frac{4(dx^2 - \eta^2 dy^2)}{(1 - x^2 + \eta^2 y^2)^2} \iff \begin{cases} \text{HIPERBÓLICA} & : \eta^2 = -1 \\ \text{CO-MINKOWSKIANA} & : \eta^2 = 0 \\ \text{DUPLAMENTE HIPERBÓLICA} & : \eta^2 = 1 \end{cases}$$

Uma geometria é, conseqüentemente, definida por um conjunto M (o ‘espaço’) e um grupo G de transformações de M .

EXEMPLOS:

PROJECTIVA- No caso da Geometria Projectiva, $M \simeq P_n(\mathbb{R})$ é o conjunto de linhas de \mathbb{R}^{n+1} passando pela origem : como variedade M é identificável com o quociente da esfera \mathbb{S}^n pela relação de equivalência identificando pontos antipodais $x \equiv -x$. (Tente “perspectivar” isto usando o exemplo de $P_2(\mathbb{R})$.) Lembre-se que as coordenadas homogêneas x e $x' \equiv \lambda x$ representam o mesmo ponto de M , já que $\frac{x_i}{x_{n+1}} \equiv \frac{x'_i}{x'_{n+1}}$. O grupo é $G \simeq GL(n+1, \mathbb{R})$;

AFIM- Para a Geometria Afim, $M \simeq \mathbb{R}^n$ e $G = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, ($GL(n, \mathbb{R})$ é o grupo das matrizes $n \times n$ reais de determinante não-nulo, e \times indica o **PRODUTO SEMI-DIRECTO** de $GL(n, \mathbb{R})$ com o grupo abeliano \mathbb{R}^n);

MÉTRICA- As Geometrias Métricas em $M \simeq \mathbb{R}^n$ devem ter, como o seu nome dá a entender, um grupo G que deixe invariante a métrica respectiva. Assim, das geometrias acima indicadas, as dotadas duma distância “**ADITIVA**” têm grupos $G \subset \mathbb{Z}_2 \otimes SL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ correspondendo, para cada $\eta^2 = -1, 0, 1$, a transformações da forma

$$x' = \rho A \cdot x + b$$

onde $\rho = \pm 1$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \eta^2 \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

com $\text{DET}[\mathbf{A}] = \alpha^2 - \eta^2 \beta^2 = 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$.

TOPOLÓGICA- A **ESTRUTURA TOPOLÓGICA** de uma superfície M (uma esfera \mathbb{S}^2 ou torus $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, por exemplo) é a geometria associada à escolha de G como o grupo $\text{HOM}(M)$ formado pelos homeomorfismos de M (i.e. transformações de M contínuas, inversíveis e de inverso também contínuo).

DIFERENCIAL- Se, no exemplo anterior, substituirmos o grupo $\text{HOM}(M)$ pelo sub-grupo $\text{DIFF}(M)$ formado pelos difeomorfismos de M (i.e. os homeomorfismos diferenciáveis e de inverso diferenciável em M) obtemos a **GEOMETRIA DIFERENCIAL** da superfície M .

EXERCÍCIO [1.1]

Para cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ defina

$$z \equiv x + \eta y \quad ; \quad \bar{z} \equiv x - \eta y$$

Utilize a definição de **COMPRIMENTO DE ARCO**

$$l_\gamma(\tau) = \int_0^\tau \sqrt{\mathbf{g}\left(\frac{d\gamma(t)}{dt}, \frac{d\gamma(t)}{dt}\right)} dt$$

para um caminho $\gamma : (0, 1) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e parta do princípio que $l_\gamma(\tau) \approx d(z_{\gamma(0)}, z_{\gamma(\tau)})$ para $\tau \rightarrow 0$.

– Mostre que as métricas **(1-67)**, **(1-68)** e **(1-69)** anteriormente dadas correspondem a noções de **DISTÂNCIA** distintas, respectivamente

$$\begin{cases} d(z_1, z_2) = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{(1 + z_1 \bar{z}_2)(1 + \bar{z}_1 z_2)}} \right) \\ d(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \\ d(z_1, z_2) = 2 \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)}{(1 - z_1 \bar{z}_2)(1 - \bar{z}_1 z_2)}} \right) \end{cases}$$

1.3 Grupos e Geometrias em Física

I – ESTRUTURAS MATEMÁTICAS EM MECÂNICA CLÁSSICA

ESPAÇO DE:

CONFIGURAÇÃO: Variedade n-dimensional **REAL** Q , se existir ... ;

FASE: Variedade **SIMPLÉTICA** (M, ω) . Quando o espaço de configuração Q existe, $M \simeq T^*Q$ é o espaço cotangente a Q , e

$$\omega = d\mathbb{p} \wedge d\mathbb{q} = d\theta$$

a forma simplética, onde $\theta = \pi^*p$ é a 1-forma canónica.

OBSERVÁVEIS: Espaço $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$ de funções **REAIS** C^{∞} em M com as seguintes estruturas:

ÁLGEBRA DE LIE $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$:

determinada pelo produto anti-simétrico (parêntesis de Poisson)

$$\{f, g\} = \omega(\mathbb{X}_f, \mathbb{X}_g), \quad \forall f, g \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$$

onde \mathbb{X}_f é o campo hamiltoniano correspondente a f , i.e.

$$\iota_{\mathbb{X}_f} \omega = -df$$

ÁLGEBRA DE JORDAN $C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$:

determinada pelo produto

$$(f \odot g)(m) = f(m)g(m), \quad \forall f, g \in C_{\mathbb{R}}^{\infty}(M)$$

Esta é uma álgebra **COMUTATIVA, ASSOCIATIVA E DISTRIBUTIVA** com identidade 1.

II – ESTRUTURAS MATEMÁTICAS EM MECÂNICA QUÂNTICA

ESPAÇO CONFIGURAÇÃO Q : Variedade n-dimensional **REAL**, se existir ... ;

ESPAÇO DE "FASE" $(\mathcal{H}, \langle, \rangle)$: Espaço de Hilbert. Quando Q existe, $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(Q, \mu, \mathbb{C})$ e

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \int_Q \bar{\Psi}(q)\Phi(q) d\mu(q)$$

"OBSERVÁVEIS" $\mathcal{O}(\mathcal{H})$: Espaço de Operadores lineares **AUTO-ADJUNTOS** $A = A^\dagger$ em \mathcal{H} formando uma sub-álgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e ainda com as seguintes estruturas adicionais:

ÁLGEBRA DE LIE: determinada pelo produto anti-simétrico (comutador)

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = -\frac{i}{\hbar} ((\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) - \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2)$$

ÁLGEBRA DE JORDAN: determinada pelo produto

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \frac{1}{2} ((\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 - \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2)$$

Esta álgebra é **COMUTATIVA, NÃO-ASSOCIATIVA E DISTRIBUTIVA** com identidade 1.

NB-1: A existência de regras de "superselecção" inviabiliza a hipótese de todos os operadores auto-adjuntos em \mathcal{H} corresponderem a observáveis físicos no sentido clássico.

NB-2: Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são auto-adjuntos, então $\mathbf{AB} \neq (\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{BA}$ em geral, mas $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})^\dagger$ e é por isso que a estrutura de Jordan se torna importante neste contexto.

III – MECÂNICA LAGRANGEANA

"ESPAÇO DE CONFIGURAÇÃO": variedade Q com cartas locais $\{\mathcal{V}_\gamma, q^i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

"ESPAÇO DE ESTADOS": fibrado tangente $M = TQ$, com cartas locais $\{\pi^{-1}(\mathcal{V}_\gamma), (q^i, v^i)\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), onde $\pi : TQ \rightarrow Q$

"LAGRANGEANO": função $\mathcal{L}(\vec{q}, \vec{v}) \in C_R^\infty(M)$

"EQUAÇÕES DE LAGRANGE":

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}} = \vec{v} \\ d\vec{q} \cdot \left(\frac{d}{dt} (\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}) - \partial_{\vec{q}} \mathcal{L} \right) = 0 \end{cases}$$

Se $\mathbb{X} \in TM$ é o campo da dinâmica

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}} &= \vec{v} = \iota_{\mathbb{X}} d\vec{q} \\ \dot{\vec{v}} &= \iota_{\mathbb{X}} d\vec{v} \\ \frac{d}{dt} (\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}) &= \iota_{\mathbb{X}} d(\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}) \end{cases}$$

então das identidades

$$d\vec{q} \cdot \partial_{\vec{q}} \mathcal{L} = d\mathcal{L} - d\vec{v} \cdot \partial_{\vec{v}} \mathcal{L}$$

$$d\vec{v} \cdot \partial_{\vec{v}} \mathcal{L} = d(\vec{v} \cdot \partial_{\vec{v}} \mathcal{L}) - d(\partial_{\vec{v}} \mathcal{L}) \cdot \vec{v}$$

obtemos

$$d\vec{q} \cdot \left(\frac{d}{dt} (\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) - \partial_{\vec{q}} \mathcal{L} \right) = d(\vec{v} \cdot (\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) - \mathcal{L}) + d\vec{q} \cdot \left(\iota_{\mathbb{X}} d(\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) \right) - d(\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) \cdot \vec{v}$$

O primeiro termo é o diferencial de uma função **ENERGIA**

$$h = \vec{v} \cdot (\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) - \mathcal{L}$$

enquanto que o restante pode escrever-se, lembrando que $\vec{v} = \iota_{\mathbb{X}} d\vec{q}$

$$d\vec{q} \cdot \left(\iota_{\mathbb{X}} d(\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) \right) - d(\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) \cdot \vec{v} = d\vec{q} \cdot \left(\iota_{\mathbb{X}} d(\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) \right) - d(\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) \cdot (\iota_{\mathbb{X}} d\vec{q}) = \iota_{\mathbb{X}} \omega$$

onde

$$\omega = d(\partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) \wedge d\vec{q} = d\vec{q} \wedge d\vec{q} \cdot (\partial_{\vec{q}} \partial_{\dot{v}} \mathcal{L}) + d\vec{v} \wedge d\vec{q} \cdot (\partial_{\dot{v}} \partial_{\dot{v}} \mathcal{L})$$

de forma que $\mathbb{X}_h = \mathbb{X}$ é o campo hamiltoniano para a função energia

$$\iota_{\mathbb{X}} \omega = -dh$$

► OBJECÇÕES À DESCRIÇÃO LAGRANGEANA

... OU PORQUE É QUE UMA ANÁLISE GERAL DA RELAÇÃO ENTRE MECÂNICA CLÁSSICA E QUÂNTICA NÃO SE DEVE BASEAR NELA...¹⁹

- O Lagrangeano não é unívocamente determinado pela dinâmica clássica.
- Para sistemas cujo espaço de fase não é um fibrado co-tangente (e.g. partículas com graus de liberdade internos), o Princípio de Hamilton não pode ser aplicado directamente.

¹⁹ - Woodhouse, N.: **GEOMETRIC QUANTIZATION** §2.8

IV – ESTRUTURA SIMPLÉTICA CANÓNICA

ESPAÇO CONFIGURAÇÃO: variedade Q com cartas locais $\{\mathcal{V}_\gamma, q^i\}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$.

FIBRADO CO-TANGENTE: variedade simplética $M = T_Q^*$, com cartas locais $\{\pi^{-1}(\mathcal{V}_\gamma), (q^i, p_i)\}$, $(i = 1, 2, \dots, n)$, onde $\pi : T_Q^* \rightarrow Q$ é a projecção canónica e $\alpha_{\tilde{q}} \in \pi^{-1}(\tilde{q})$ é a forma linear

$$\begin{aligned} \alpha_{\tilde{q}} : T_{\tilde{q}}Q &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{X}_{\tilde{q}} &\mapsto \iota_{\mathbb{X}_{\tilde{q}}} \alpha_{\tilde{q}} = p_i X^i(\tilde{q}) \end{aligned}$$

Pondo $\mathbb{X}_{\tilde{q}} = \mathbf{X}(\tilde{q}) \cdot \partial_{\tilde{q}}$ e $\alpha_{\tilde{q}} = d\tilde{q} \cdot \mathbf{p}$, onde

$$\partial_{\tilde{q}} = \tilde{e}^i \otimes \partial_{q^i}; \quad \mathbf{X} = X^i \tilde{e}_i; \quad \mathbf{p} = p_i \tilde{e}^i; \quad d\tilde{q} = dq^i \otimes \tilde{e}_i$$

podemos escrever

$$\iota_{\mathbb{X}_{\tilde{q}}} \alpha_{\tilde{q}} = \alpha_{\tilde{q}}(\mathbb{X}_{\tilde{q}}) = \mathbf{X}(\tilde{q}) \cdot \mathbf{p}$$

1-FORMA CANÓNICA θ : É a forma linear em $M = T_Q^*$ que verifica:

$$\begin{aligned} \theta : TM &\rightarrow \mathbb{R} \\ \tilde{\mathbb{X}}_{\alpha_{\tilde{q}}} &\mapsto \iota_{\tilde{\mathbb{X}}_{\alpha_{\tilde{q}}}} \theta = \iota_{\pi_* \tilde{\mathbb{X}}_{\alpha_{\tilde{q}}}} \alpha_{\tilde{q}} \end{aligned}$$

Em coordenadas locais $\pi_* \tilde{\mathbb{X}}_{\alpha_{\tilde{q}}} = \mathbf{X}(\tilde{q}) \cdot \partial_{\tilde{q}} \in TQ$ porque

$$\pi : M \rightarrow Q \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \pi_* : TM \rightarrow TQ \\ \pi^* : T_Q^* \rightarrow T_M^* \end{cases}$$

donde

$$\iota_{\tilde{\mathbb{X}}_{\alpha_{\tilde{q}}}} \theta = \mathbf{X}(\tilde{q}) \cdot \tilde{\mathbf{p}} \quad \Rightarrow \quad \theta_{\alpha_{\tilde{q}}} = \pi^*(\alpha_{\tilde{q}}) = \pi^*(d\tilde{q} \cdot \tilde{\mathbf{p}})$$

2-FORMA CANÓNICA ω : É a FORMA SIMPLÉTICA

$$\omega = d\theta = d\tilde{\mathbf{p}} \wedge d\tilde{q} \cdot \mathbf{1} = dp_i \wedge dq^i$$

onde $\mathbf{1} = \delta_j^i \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}^j$ e

$$\begin{cases} d\tilde{\mathbf{p}} = dp_i \otimes \tilde{e}^i \\ d\tilde{q} = dq^i \otimes \tilde{e}_i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\mathbf{p}} \wedge d\tilde{q} = (dp_i \wedge dq^i) \otimes \tilde{e}^i \otimes \tilde{e}_j$$

TEOREMA (DARBOUX)

Toda a variedade simplética possui uma estrutura local da forma

$$\omega = dp_i \wedge dq^i$$

Isto não significa que ω seja exacta, nem que exista um espaço de configuração tal que $M = T_Q^*$.

► A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

A equação de Klein-Gordon

$$\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2\right)\phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi = 0$$

- É aplicável a partículas de **SPIN** qualquer.

Sofre as seguintes deficiências:

- **A DENSIDADE DE PROBABILIDADE**

$$\rho = j^0 = \frac{i\hbar}{2m} (\bar{\phi}\partial_t\phi - \phi\partial_t\bar{\phi})$$

não é **POSITIVA DEFINIDA**.

- Existem soluções que representam **ESTADOS DE ENERGIA NEGATIVA** bem como positiva $E = \pm (m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2)^{\frac{1}{2}}$. Isto significa que uma partícula pode, através de interações, decair para estados de energia infinita negativa, libertando no processo uma quantidade infinita de energia!

► A EQUAÇÃO DE DIRAC

A equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

- É de 1^a-ordem e é válida apenas para partículas de **SPIN** $\frac{1}{2}$.

- Prevê o valor correcto do **FACTOR DE LANDÉ** $g_s = 2$ para o momento magnético de spin $S = \frac{1}{2}\hbar\sigma$ do electrão

$$\mu = -2\frac{e}{2m}\mathbf{S} = \frac{e\hbar}{2m}\sigma$$

► O GRUPO DE PONCARÉ

- O pseudo-vector de **PAULI-LUBANSKI**

$$W_\mu = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$$

e o quadri-vector **ENERGIA-MOMENTO** P^μ geram os invariantes de Casimir do grupo de Poincaré (que é de rank=2)

$$\begin{cases} C_1 = P_\mu P^\mu = m^2 \\ C_2 = W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1) \end{cases}$$

1.4 Grupos de Transitividade em espaços de Estados

1.5 Grupos e Geometria Diferencial

PARTE II

GRUPOS: DEFINIÇÕES BÁSICAS

CAPÍTULO 2

GRUPOS ABSTRACTOS

Contents

2.1 Estruturas Algébricas	37
Semi-grupo, Monóide, Grupo, Anel, Corpo, Espaço Vectorial, Álgebra	37
Acção de um Grupo	40
2.2 Grupos de Permutações	41
Grupo de Permutações e Grupo Simétrico S_n	41
Grupo de Permutações Regulares	42
2.3 Sub-grupos	43
Sub-grupo Próprio, Normal	43
Co-conjuntos de um sub-grupo	44
Índice dum Sub-grupo	44
Teorema de Lagrange	44
Grupo Quociente, Factor	45
Grupo Simples, Resolúvel, Séries Invariantes	46
2.4 Classificação de Grupos Finitos	46
Teorema de Cayley	46
2.5 Classes de Conjugação	47
Operação de Conjugação	47
Álgebra de um Grupo Finito	48
Classes de Conjugação de S_n	49
Diagramas de Young	50
2.6 Problemas da Parte II	52

2.1 Estruturas Algébricas

I – SEMI-GRUPO, MONÓIDE, GRUPO, ANEL, CORPO, ESPAÇO VECTORIAL, ÁLGEBRA

Um conjunto S (finito ou infinito) dotado de (pelo menos uma) operação binária entre elementos de S , com valores em S e satisfazendo axiomas específicos designa-se um sistema algébrico.

SEMI-GRUPO – É um sistema (S, \diamond) constituído por um conjunto S e uma operação binária $\diamond : S \times S \rightarrow S$ que é **ASSOCIATIVA**, i.e. quaisquer três elementos $s_1, s_2, s_3 \in S$ verificam

$$s_1 \diamond (s_2 \diamond s_3) = (s_1 \diamond s_2) \diamond s_3$$

MONÓIDE – É um **SEMI-GRUPO** (M, \diamond) com **ELEMENTO UNIDADE** e , ou seja um elemento de M que verifica, para todo o $m \in M$

$$e \diamond m = m \diamond e = m$$

Se a operação \diamond for **COMUTATIVA**, $m_1 \diamond m_2 = m_2 \diamond m_1$ sempre, costuma-se adjectivar de **ABELIANA** a estrutura algébrica e representar a operação binária aditivamente (+), designando-se o elemento unidade de **ELEMENTO NEUTRO** ou 0. Doutra forma a operação binária denota-se multiplicativamente e o elemento unidade chama-se **IDENTIDADE** ou 1.

Ex.– Por exemplo, são módulos aditivos o conjunto \mathbb{N} dos números **NATURAIS** $\{0, 1, 2, \dots\}$, o conjunto \mathbb{Z} dos números **INTEIROS** $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ou o conjunto finito \mathbb{Z}_n dos **INTEIROS MÓDULO n** (i.e. o conjunto de restos $r = k - qn$ da divisão inteira q de k por n). Estes mesmos conjuntos são também módulos multiplicativos, mas com um elemento unidade diferente, $e = 1$.

GRUPO – É um **MONÓIDE** (G, \diamond, e) em que todos os elementos têm um inverso, i.e. para qualquer $g \in G$ existe e é única ($g' = g'' = g^{-1}$) a solução para as equações

$$g \diamond g' = e = g'' \diamond g$$

Ex.– Por exemplo, \mathbb{Z} e \mathbb{Z}_n são grupos abelianos (aditivos). $\mathbb{Z}_n - \{0\}$ é um grupo multiplicativo. O conjunto S_n de permutações de n objectos é um grupo quando \diamond é a composição de permutações. A identidade é a permutação idêntica, i.e aquela que deixa tudo no mesmo sítio. O conjunto \mathcal{D}_3 das operações de simetria num triângulo equilátero, com \diamond a composição de simetrias, é também um grupo finito com 6 elementos

$$\mathcal{D}_3 = \{e, R_o, R_o^2, R_1, R_2, R_3\} \quad \text{com} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_o - \text{rotação de } 120^\circ \text{ em torno dum eixo perpen-} \\ \text{dicular ao plano do triângulo passando pelo} \\ \text{seu centro.} \\ R_i - \text{rotação de } 180^\circ \text{ em torno de um eixo no} \\ \text{plano do triângulo, passando pelo centro e} \\ \text{pelo vértice } i = 1, 2, 3. \end{array} \right.$$

ANEL – É um **GRUPO ABELIANO** $(A, +, 0)$ com uma operação binária adicional \diamond , para a qual também é um **MONÓIDE** (A, \diamond, e) , com a propriedade de ser **DISTRIBUTIVA** relativamente á operação de grupo

$$\begin{aligned} a_1 \diamond (a_2 + a_3) &= a_1 \diamond a_2 + a_1 \diamond a_3 \\ (a_2 + a_3) \diamond a_1 &= a_2 \diamond a_1 + a_3 \diamond a_1 \end{aligned}$$

Ex.– Os inteiros \mathbb{Z} , os números **RACIONAIS** \mathbb{Q} , os reais \mathbb{R} e os complexos \mathbb{C} são todos anéis relativamente à soma e produto aí naturalmente definidos. (0 não tem inverso relativamente à multiplicação.)

CORPO – É um **ANEL** não-trivial $(K, +, 0, \diamond, e)$, abeliano para a operação monóide \diamond e relativamente à qual todo o elemento $k \neq 0$ possui um inverso $k \diamond k^{-1} = e = k^{-1} \diamond k$.

Ex. – Os racionais \mathbb{Q} , os reais \mathbb{R} , os complexos \mathbb{C} são corpos.

DEFINIÇÃO [2.1]

Um **GRUPO** é um par (G, \circ) onde G é um conjunto, e \circ representa uma operação **BINÁRIA ASSOCIATIVA** de $G \times G \rightarrow G$, para a qual existe um elemento $e \in G$ tal que, para $\forall g \in G$:

- i) $g \circ e = g$;
- ii) $g \circ g' = e$ tem solução $g' \in G$;

- O elemento e chama-se o elemento **NEUTRO** ou a **IDENTIDADE** de G , e é **ÚNICO**(ver exercício).
- O elemento g' designa-se o **INVERSO** de g e passa a representar-se g^{-1} .
- Quando não houver ambiguidade, o grupo (G, \circ) será referido como o **GRUPO** G , e a operação $g_1 \circ g_2$ como $g_1 g_2$.

EXERCÍCIO 2.1

Mostre os seguintes resultados, para $\forall g, g_1, g_2 \in G$:

- I. $g^{-1}g = e$
- II. $eg = g$
- III. $\exists^1 x \in G$ tal que $g_1x = g_2$.
- IV. $\exists^1 y \in G$ tal que $yg_1 = g_2$.
- V. O elemento neutro $e \in G$ é único.
- VI. Se $g_1g_2 = e$, então $g_2 = g_1^{-1}$
- VII. $(g_1g_2 \dots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \dots g_2^{-1} g_1^{-1}$
- VIII. $(g^{-1})^{-1} = g$

$$[g \circ g' = e = g' \circ g]$$

De $g \circ g' = e$ obtém-se, por multiplicação à esquerda por g' , que $g' \circ (g \circ g') = g' \circ e = g'$. Mas deve existir um g'' que resolve $g' g'' = e$. Então, multiplicando à direita por g'' , temos $g' \circ (g \circ g') \circ g'' = g' g'' = e$. Mas o lado esquerdo, usando associatividade do produto, é $g' \circ (g \circ g') \circ g'' = (g' \circ g) \circ (g' \circ g'') = (g' \circ g) \circ e = (g' \circ g)$. Concluimos assim que $g' \circ g = e$ donde podemos escrever sem ambiguidade $g' \equiv g^{-1}$.

$$[e \circ g = g]$$

Da identidade anterior e da associatividade mostra-se que $e \circ g = (g \circ g') \circ g = g \circ (g' \circ g) = g \circ e = g$.

$$[e \text{ e } g^{-1} \text{ únicos}]$$

O elemento neutro é único porque se existisse $e' \circ g = g$ então, multiplicando à direita por g' , se teria $e' \circ g \circ g' = e' \circ e = e' = g \circ g' = e$ donde $e' = e$. O inverso de g também é único: $g \circ g' = e = g \circ g'' \implies e \circ g' = e \circ g''$ por isso se pode escrever $g^{-1} = g'$.

II – ACÇÃO DE UM GRUPO

DEFINIÇÃO [2.2]

Uma **ACÇÃO** de um grupo G num conjunto M é uma correspondência $\phi : G \rightarrow \text{AUT}(M)$ que a cada $g \in G$ faz corresponder uma transformação ϕ_g de M tal que:

$$\phi_g \circ \phi_{g'} = \phi_{gg'} \quad ; \quad \phi_e = Id$$

– A **ÓRBITA** de um ponto $m \in M$ relativa à acção ϕ de um grupo G em M é o conjunto

$$O_m^G = \{m' = \phi_g(m)\}_{g \in G}$$

– O **ESTABILIZADOR** ou **SUB-GRUPO DE ESTACIONARIDADE** de m relativamente a G é o conjunto

$$G_m = \{g \in G : \phi_g(m) = m\}$$

– Os estabilizadores de pontos da mesma órbita O_m^G são elementos **CONJUGADOS** em G , i.e.

$$G_{\phi_g(m)} = g G_m g^{-1}$$

- A correspondência $\phi(m) : G \rightarrow O_m^G$
 $g \mapsto \phi_g(m)$ determina uma bijecção entre G/G_m e O_m^G .
- As órbitas $O_m^G, O_{m'}^G$ de dois pontos distintos de M ou são disjuntas $O_m^G \cap O_{m'}^G = \emptyset$ ou coincidem $O_m^G \equiv O_{m'}^G$, definindo assim uma **PARTIÇÃO** de $M = \bigsqcup_i O_{m_i}^G$.
- O espaço das órbitas designa-se $M/G = \{O_m^G\}_{m \in M}$ e vem dotado de uma **PROJECCÃO CANÓNICA** $\pi : M \rightarrow M/G$ que associa a cada ponto de M a órbita a que pertence.
- M designa-se um **ESPAÇO HOMOGÉNEO** de G se apenas existir uma órbita de G , e nesse caso a acção de G em M é **TRANSITIVA**.

2.2 Grupos de Permutações

1 – GRUPO DE PERMUTAÇÕES E GRUPO SIMÉTRICO S_n .

DEFINIÇÃO [2.3]

- Uma **PERMUTAÇÃO** dum conjunto M é uma bijecção $\sigma : M \rightarrow M$.
- Um **GRUPO DE PERMUTAÇÕES** é um par (G, M) onde M é um conjunto, e G um sub-conjunto de permutações de M formando um grupo para a **COMPOSIÇÃO DE PERMUTAÇÕES**.
- O conjunto $S(M)$ de **TODAS** as permutações de M é um grupo para a operação de composição, designado **GRUPO SIMÉTRICO** de M .

- O **GRAU** do grupo de permutações (G, M) é a **ORDEM** ou **CARDINALIDADE** do conjunto M
- Um **N-CICLO**(ou permutação cíclica de comprimento n) é uma permutação $g \in S(M)$ representada por uma colecção $g \equiv (a_1 a_2 \dots a_n)$ de n elementos de M tal que $a_i g = a_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n-1, a_n g = a_1$ e $bg = b$ para todos os outros $b \in M$.
- Dois ciclos sem elementos comuns chamam-se **DISJUNTOS**.
- Num grupo de permutações finito (G, M) , qualquer elemento $g \in G$ pode ser decomposto no produto de ciclos todos disjuntos. Esta decomposição cíclica é única (a menos de ordem).

II – GRUPO DE PERMUTAÇÕES REGULARES

DEFINIÇÃO [2.4]

Um grupo de permutações (G, M) diz-se **SEMI-REGULAR** se o estabilizador de cada ponto de M for a identidade, $G_m = \{e\}$, $\forall m \in M$.

Se a acção de um grupo de permutações semi-regular for também **TRANSITIVA** o grupo designa-se **REGULAR**.

- Os sub-grupos de ordem n do grupo simétrico S_n constituídos pela identidade e pelas permutações que não deixam nenhum símbolo invariante (ditas **PERMUTAÇÕES REGULARES** são regulares. As n permutações desse grupo aplicadas a qualquer um dos n símbolos $1, 2, \dots, n$ percorre todos os n valores possíveis, o que resulta do facto de não poder haver duas permutações do grupo que tenham o mesmo efeito sobre qualquer símbolo: se $\sigma_i(k) = \sigma_j(k)$ então $\sigma_i \circ \sigma_j^{-1}(k) = k$ embora $\sigma_i \circ \sigma_j^{-1} \neq e$.
- As permutações **REGULARES** decompõem-se em **CICLOS** de igual comprimento (vide demonstração do Corolário do Teorema de Cayley)

EXEMPLO [2.5]

$G =$ Grupo de Permutações S_6

Se $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, então

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1, 3, 4) (2, 5) (6)$$

é um elemento de G e o seu inverso é

$$g_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1, 4, 3) (2, 5) (6)$$

Se g_1 e g_2 são permutações de M , a decomposição cíclica de $g_3 = g_1 g_2 g_1^{-1}$ é obtida substituindo cada símbolo a_i da decomposição cíclica de g_2 por $a_i g_1$, e portanto g_2 e $g_1 g_2 g_1^{-1}$ têm o mesmo número de n -ciclos nas suas decomposições.

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1, 3, 4) (2, 5) (6) \quad ; \quad g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 4, 5) (3, 6) (2)$$

$$g_1 g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (2, 5, 3, 6, 4) (1) \quad \Rightarrow \quad g_1 g_2 g_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (3, 1, 2) (4, 6) (5)$$

(1, 4, 5) (3, 6) (2)
 $\downarrow \downarrow \downarrow \quad \downarrow \downarrow \downarrow$

2.3 Sub-grupos

O problema de determinar todos os sub-grupos próprios de um dado grupo G é um dos objectivos principais da teoria de grupos.

I – SUB-GRUPO PRÓPRIO, NORMAL

DEFINIÇÃO [2.6]

- i. Um **SUB-GRUPO** de um grupo (G, \circ) é um grupo (H, \star) tal que $H \subseteq G$ e \star é a restrição de \circ a $H \times H$.
- ii. O sub-grupo H é **PRÓPRIO** se $H \neq G$, e **NÃO-TRIVIAL** se $H \neq G$ e $H \neq \emptyset$.
- iii. O sub-grupo H é **NORMAL** em G (e representa-se $H \triangleleft G$) se e só se $gHg^{-1} \subseteq H$ para $\forall g \in G$.

NOTA: Para confirmar que um subconjunto $H \subset G$ é um **SUB-GRUPO** de G é necessário verificar que:

- i. o produto de qualquer par de elementos de H pertence a H : $\forall h, h' \in H, hh' \in H$.
 - ii. H contém o inverso de todos os seus elementos: $\forall h \in H, h^{-1} \in H$. (apenas necessário para grupos infinitos)
- Na prática, basta verificar que todos os produtos $xy^{-1} \in H$ para quaisquer $x, y \in H$.
- Dado um sub-grupo $H \subset G$, os seus **SUB-GRUPOS CONJUGADOS** $H^g = gHg^{-1}$ são também sub-grupos de G . Se H não fôr normal, esta é uma maneira possível de gerar novos sub-grupos de G .

EXERCÍCIO 2.2

Verifique que:

- I. Se $H \subset G$ então $e_H = e_G$
- II. Se $h \in H \subset G$ então $h_H^{-1} = h_G^{-1}$
- III. A intersecção de sub-grupos é um sub-grupo.
- IV. Se H e K são sub-grupos de G , então $HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$ é um sub-grupo **SSE** $HK = KH$.

II – CO-CONJUNTOS DE UM SUB-GRUPO

DEFINIÇÃO [2.7]

- i. Se H é um sub-grupo de G e g um elemento qualquer de G , o conjunto definido por $Hg = \{hg : h \in H\}$ designa-se **CO-CONJUNTO DE H À DIREITA**.
- ii. Um **CO-CONJUNTO DE H À ESQUERDA** é definível de forma análoga como gH .
- iii. Se K é outro sub-grupo de G , um **CO-CONJUNTO DUPLO DE H E K** é definido como o subconjunto de G da forma $HgK = \{h g k : h \in H, k \in K\}$.

- Se $g_1, g_2 \in G$ e H um sub-grupo de G , os co-conjuntos Hg_1 e Hg_2 ou são disjuntos ou são iguais (bem como g_1H e g_2H).
- $Hg_1 = Hg_2$ equivale a dizer que $g_1g_2^{-1} \in H$.
- $g_1H = g_2H$ equivale a dizer que $g_2^{-1}g_1 \in H$.
- O número de co-conjuntos de H à direita é igual ao número de co-conjuntos de H à esquerda.

III – ÍNDICE DUM SUB-GRUPO

DEFINIÇÃO [2.8]

O **ÍNDICE** $[G:H]$ do sub-grupo H em G é o número de co-conjuntos de H à direita (ou à esquerda).

IV – TEOREMA DE LAGRANGE

TEOREMA [2.9]

Se H é um sub-grupo de G , a cardinalidade dos conjuntos G e H relaciona-se por

$$\frac{o(G)}{o(H)} = [G:H]$$

Consequentemente, o número de elementos dum sub-grupo dum grupo finito é um divisor inteiro do número de elementos em G .

V – GRUPO QUOCIENTE, FACTOR

DEFINIÇÃO [2.10]

Se $N \triangleleft G$ é um sub-grupo normal de G , os co-conjuntos de N à direita formam um grupo G/N (para a multiplicação de co-conjuntos) designado **GRUPO QUOCIENTE** ou **GRUPO FACTOR** de G por N .

No grupo quociente G/N , o elemento identidade é $e_{G/N} \cong N$ e tem-se $(Ng)^{-1} = Ng^{-1}$.

- Um sub-grupo $N \subset G$ para o qual $gN = Ng, \forall g \in G$, é **NORMAL**.
- Um sub-grupo **NORMAL** coincide com o conjunto de todos os conjugados de si próprio, e por isso se designa também **AUTO-CONJUGADO, INVARIANTE** ou **DIVISOR NORMAL**.
- Um sub-grupo $N \subset G$ é **NORMAL** se coincide com a soma directa de algumas classes de conjugação de G .
- Dado um conjunto $S \subset G$, o **CENTRALIZADOR** de S em G é o conjunto $Z_G[S] = \{g \in G : gs = sg, \forall s \in S\}$.
- O **NORMALIZADOR** de S em G é $N_G[S] = \{g \in G : gSg^{-1} = S\}$

VI – GRUPO SIMPLES, RESOLÚVEL, SÉRIES INVARIANTES

DEFINIÇÃO [2.11]

- i. Um grupo G diz-se **SIMPLES** SSE os únicos seus sub-grupos **NORMAIS** são triviais.
- ii. Uma **SÉRIE NORMAL** de G é uma sequência finita (H_0, H_1, \dots, H_r) de sub-grupos de G tal que $e \equiv H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_r \equiv G$.
- iii. Uma **SÉRIE INVARIANTE** é uma série normal na qual cada $H_i \triangleleft G$.
- iv. Os quocientes H_{i+1}/H_i designam-se os **FACTORES** da série normal.
- v. Uma **SÉRIE DE DECOMPOSIÇÃO** de G é uma série normal sem repetições em que todos os **FACTORES** H_{i+1}/H_i são **SIMPLES**.
- vi. Um grupo G é **RESOLÚVEL** SSE possui uma série normal cujos **FACTORES** H_{i+1}/H_i são todos **ABELIANOS**.

- Se G é resolúvel e $H \triangleleft G$, então G/H é resolúvel.
- Se G é resolúvel e H é um sub-grupo de G , então H é resolúvel.
- Se H e G/H são grupos resolúveis, então G é resolúvel.

2.4 Classificação de Grupos Finitos

I – TEOREMA DE CAYLEY

TEOREMA [2.12]

Se G é um grupo finito de ordem n , então G é isomorfo a um sub-grupo do grupo de permutações S_n .

DEMONSTRAÇÃO

O grupo G de ordem n é um conjunto de n elementos $G = \{a_1 = e, a_2, a_3, \dots, a_n\}$. Para cada $g \in G$, o conjunto $Gg = \{a_1g, a_2g, \dots, a_ng\}$ tem o mesmo número de elementos que G , porque se $a_i g = a_j g$ então $a_i = a_j$. À parte o caso $g = e$, nenhum elemento de G deixa invariante qualquer dos a_i , porque $a_i g = a_i \Leftrightarrow g = e$. Podemos portanto representar $a_i g = a_{\sigma_g(i)}$ onde $\sigma_g \in S_n$ é uma permutação **REGULAR**, i.e. uma permutação de n símbolos que não deixa nenhum invariante. Assim existe um morfismo $\pi : G \rightarrow S_n$ tal que:

$$\pi_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_g(1) & \sigma_g(2) & \dots & \sigma_g(n) \end{pmatrix}$$

Este morfismo é injectivo porque $g \neq g' \Leftrightarrow a_i g \neq a_i g'$ donde $\pi_g \neq \pi_{g'}$. O morfismo π é de facto um homomorfismo, porque $\pi_e = e$ enquanto

$$\begin{aligned} \pi_g \circ \pi_{g'} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_g(1) & \sigma_g(2) & \dots & \sigma_g(n) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_{g'}(1) & \sigma_{g'}(2) & \dots & \sigma_{g'}(n) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{g'}(1) & \sigma_{g'}(2) & \dots & \sigma_{g'}(n) \\ \sigma_g[\sigma_{g'}(1)] & \sigma_g[\sigma_{g'}(2)] & \dots & \sigma_g[\sigma_{g'}(n)] \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_{g'}(1) & \sigma_{g'}(2) & \dots & \sigma_{g'}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_{gg'}(1) & \sigma_{gg'}(2) & \dots & \sigma_{gg'}(n) \end{pmatrix} = \pi_{gg'} \end{aligned}$$

Assim, $\pi_g = \pi_{g'} \Leftrightarrow \pi_{gg'^{-1}} = \pi_e$ donde $\pi_g^{-1} = \pi_{g^{-1}}$. A imagem $\pi[G] \subset S_n$ é assim um **SUB-GRUPO REGULAR** de S_n isomorfo a G .

COROLÁRIOS

- i. O número de grupos G de ordem n não-isomorfos é finito.
- ii. Os grupos G de ordem $n = \mathbf{PRIMO}$ são cíclicos.

DEMONSTRAÇÃO

- i. Decorre de apenas existir um número finito de sub-grupos de ordem n de S_n .
- ii. É consequência da observação de que qualquer elemento $g \in G$ corresponde a uma permutação **REGULAR** π_g que se decompõe em ciclos $\varsigma_i(k)$ de **IGUAL COMPRIMENTO** k . Porque se $\pi_g = \varsigma_1(k_1)\varsigma_2(k_2)\dots\varsigma_m(k_m)$, então $\pi_g^{k_1}$ deixa os k_1 elementos envolvidos no ciclo $\varsigma_1(k_1)$ invariantes, pelo que todos os outros ciclos devem fazer o mesmo, ou $\pi_g^{k_1}$ deixaria de ser uma permutação regular. Por isso $k_i = k_1$ e $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n = m k_1$ donde todos os $k_i = \frac{n}{m}$ têm de ser divisores de n , e caso n seja primo, as únicas possibilidades são $k_i = 1, n$. No primeiro caso $\pi_g = e$, o que é trivial, mas no segundo $\pi_g = \varsigma_1(n)$, i.e. um n -ciclo.

2.5 Classes de Conjugação

I – OPERAÇÃO DE CONJUGAÇÃO

DEFINIÇÃO [2.13]

Dado um grupo G , a **RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA** \mathcal{R} entre elementos $x, y \in G$ definida por

$$(2-1) \quad x \mathcal{R} y \iff \{ \exists g \in G : y = g x g^{-1} \}$$

determina uma partição de G em **CLASSES DE CONJUGAÇÃO** $C_\alpha \in \frac{G}{\mathcal{R}}$

Em particular note que :

- O elemento unidade $e \in G$ forma por si só uma classe $C_1 = \{e\}$.
- Se $x \mathcal{R} y$ então também $x^{-1} \mathcal{R} y^{-1}$. Portanto, se $C = \{x, y, \dots\}$ é uma classe de equivalência, também $C^{-1} = \{x^{-1}, y^{-1}, \dots\}$ o é.
- Se $C^{-1} \equiv C$ para qualquer classe de G , i.e. se $\forall x \in G, \exists g \in G : x^{-1} = gxg^{-1}$, então G designa-se **GRUPO AMBIVALENTE** e tem-se sempre $x^{-1} \mathcal{R} x$.

Qualquer grupo pode ser considerado, enquanto conjunto, como a união disjunta das suas diferentes classes C_i de equivalência $G = \bigcup_i C_i$. As classes C_i não formam um grupo em geral, mas sim uma **ÁLGEBRA**, definindo o produto de duas classes $C_\alpha = \{x_1, x_2, \dots, x_{c_\alpha}\}$ e $C_\beta = \{y_1, y_2, \dots, y_{c_\beta}\}$ por

$$(2-2) \quad C_\alpha C_\beta = \{x_i y_j\} \quad (i = 1, \dots, c_\alpha); \quad (j = 1, \dots, c_\beta)$$

O número de produtos em (2-2) é $\#(C_\alpha C_\beta) = c_\alpha c_\beta$ e pode-se mostrar que existem inteiros positivos $h_{\alpha\beta}^\gamma$ tais que, formalmente,

$$C_\alpha C_\beta = \sum_\alpha^\oplus h_{\alpha\beta}^\gamma C_\gamma$$

De facto, basta mostrar que, se $g \in C_\gamma$ é da forma $g = x_i y_j$ para alguns $x_i \in C_\alpha$ e $y_j \in C_\beta$, então qualquer outro elemento da classe C_γ também está no produto $C_\alpha C_\beta$.

$$\tilde{g} g \tilde{g}^{-1} = \tilde{g} x_i y_j \tilde{g}^{-1} = (\tilde{g} x_i \tilde{g}^{-1}) (\tilde{g} y_j \tilde{g}^{-1}) = x_r y_s$$

Por outro lado, se existirem $h_{\alpha\beta}^\gamma$ produtos em $C_\alpha C_\beta$ que dão o mesmo elemento $g \in C_\gamma$, o raciocínio anterior também mostra que existem outros tantos produtos que dão $\tilde{g} \in C_\gamma$. Cada classe aparece assim zero ou um número inteiro positivo de vezes no produto de duas classes. Em particular, a classe do elemento identidade $C_1 = \{e\}$ só aparece em produtos envolvendo uma classe e a sua inversa, i.e.

$$(2-3) \quad h_{\alpha\beta}^1 = c_\alpha \delta_{\alpha\bar{\beta}} \quad \text{onde} \quad \delta_{\alpha\bar{\beta}} = \begin{cases} 1 & \text{se } C_\alpha = C_\beta^{-1} \\ 0 & \text{se } C_\alpha \neq C_\beta^{-1} \end{cases}$$

II – **ÁLGEBRA DE UM GRUPO FINITO**

DEFINIÇÃO [2.14]

Dado G um grupo finito, a **ÁLGEBRA DE GRUPO** \mathfrak{A}_G de G é o conjunto formado pelas combinações lineares formais $\mathfrak{g} = \sum_{i=1}^{\#G} \zeta_i g_i$ com $\zeta_i \in \mathbb{C}$.

Os elementos \mathbb{C} da álgebra de grupo \mathfrak{A}_G denominam-se **números hipercomplexos**.

O centro desta álgebra é o sub-espço vectorial C_G gerado pelos números hipercomplexos $\mathfrak{g}_\alpha = \sum_{i=1}^{c_\alpha} g_{\alpha_i}$, com $g_{\alpha_i} \in C_\alpha$. De facto

$$\mathbb{G} \mathfrak{g}' = \sum_{i=1}^{c_\alpha} g_{\alpha_i} \sum_{j=1}^{\#G} \zeta_j g'_j = \sum_{j=1}^{\#G} \zeta_j g'_j \sum_{i=1}^{c_\alpha} g_{\alpha_i}^{-1} g_{\alpha_i} g'_j = \mathfrak{g}' \mathfrak{g}_\alpha$$

C_G é uma sub-álgebra **Abeliana** da álgebra de grupo \mathfrak{H}_G , e é designada **Álgebra das Classes de Conjugação**, porque de facto

$$\mathfrak{g}_\alpha \mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{g}_\beta \mathfrak{g}_\alpha = \sum_{\gamma} h_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathfrak{g}_\gamma$$

As constantes $h_{\alpha\beta}^{\gamma}$ designam-se **Constantes de Estrutura** da álgebra C_G .

EXERCÍCIO [2.3]

Mostre que as constantes de estrutura $h_{\alpha\beta}^{\gamma}$ da álgebra das Classes de Conjugação verificam

$$(2-4) \quad h_{\alpha\beta}^{\gamma} = h_{\beta\alpha}^{\gamma} \quad ; \quad \sum_{\alpha} h_{\alpha\beta}^{\gamma} = c_{\beta} \quad ; \quad h_{\alpha\beta}^1 = \delta_{\alpha\bar{\beta}} c_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \text{se } C_{\alpha} = C_{\beta}^{-1} \\ 0 & \text{se } C_{\alpha} \neq C_{\beta}^{-1} \end{cases}$$

De facto $G C_{\alpha} = c_{\alpha} G$ ou se quisermos pôr $\mathbb{G} = \sum_{i=1}^{\#G} g_i$, $\mathbb{G} \mathfrak{g}_{\alpha} = c_{\alpha} \mathbb{G} = \mathfrak{g}_{\alpha} \mathbb{G}$. Por outro lado $\mathbb{G} = \sum_{\beta} \mathfrak{g}_{\beta}$ donde

$$\mathbb{G} \mathfrak{g}_{\alpha} = \sum_{\beta} \mathfrak{g}_{\beta} \mathfrak{g}_{\alpha} = \sum_{\gamma} \sum_{\beta} h_{\beta\alpha}^{\gamma} \mathfrak{g}_{\gamma} = c_{\alpha} \sum_{\gamma} \mathfrak{g}_{\gamma}$$

Daqui se conclui que $\sum_{\beta} h_{\beta\alpha}^{\gamma} = c_{\alpha}$. Quanto ao $h_{\alpha\beta}^1$ é necessário recordar que os elementos de $C_{\bar{\beta}} = C_{\beta}^{-1}$ são os inversos dos elementos de C_{β} , pelo que só no produto destas duas classes aparece a classe $C_1 = \{e\}$, e nessa altura aparece $c_{\beta} = c_{\bar{\beta}}$ vezes, i.e. $\mathfrak{g}_{\alpha} \mathfrak{g}_{\beta} = c_{\beta} \delta_{\alpha\bar{\beta}} \mathfrak{g}_1 + \sum_{\gamma} h_{\alpha\beta}^{\gamma} \mathfrak{g}_{\gamma}$.

III – CLASSES DE CONJUGAÇÃO DE S_n

PROPOSIÇÃO

Dois elementos de S_n pertencem à mesma classe de conjugação SSE tiverem a mesma estrutura cíclica.

DEMONSTRAÇÃO

Para o ver basta calcular a conjugação de um elemento genérico envolvendo um **k-ciclo** ($i_1 i_2 \dots i_k$). Então

$$g = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i_1 & \dots & i_2 & \dots & i_k & \dots & n \\ \sigma_g[1] & \dots & \sigma_g[i_1] & \dots & \sigma_g[i_2] & \dots & \sigma_g[i_k] & \dots & \sigma_g[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i_1 & \dots & i_2 & \dots & i_k & \dots & n \\ \sigma_g[1] & \dots & i_2 & \dots & i_3 & \dots & i_1 & \dots & \sigma_g[n] \end{pmatrix}$$

portanto $\sigma_g[i_j] = i_{j+1}$ para $i_j \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Agora

$$\begin{aligned} \tilde{g} g \tilde{g}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & i_1 & \dots & i_2 & \dots & i_k & \dots & n \\ \sigma_{\tilde{g} g \tilde{g}^{-1}}[1] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g \tilde{g}^{-1}}[i_1] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g \tilde{g}^{-1}}[i_2] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g \tilde{g}^{-1}}[i_k] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g \tilde{g}^{-1}}[n] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{g}}[1] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_1] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_2] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_k] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[n] \\ \sigma_{\tilde{g} g}[1] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g}[i_1] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g}[i_2] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g}[i_k] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g}[n] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{\tilde{g}}[1] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_1] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_2] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_k] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[n] \\ \sigma_{\tilde{g} g}[1] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_2] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_3] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[i_1] & \dots & \sigma_{\tilde{g} g}[n] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fica assim demonstrado que onde $g = (\dots) (i_1 i_2 \dots i_k) (\dots)$ se substitui

$$\tilde{g} g \tilde{g}^{-1} = (\dots) (\sigma_{\tilde{g}}[i_1] \sigma_{\tilde{g}}[i_2] \sigma_{\tilde{g}}[i_k]) (\dots)$$

Conversamente, se g e g' tiverem a mesma estrutura cíclica

$$g = (i_1 i_2 \dots i_\alpha) (i_{\alpha+1} i_{\alpha+2} \dots i_{\alpha+\beta}) \dots \quad \text{e} \quad g' = (i'_1 i'_2 \dots i'_\alpha) (i'_{\alpha+1} i'_{\alpha+2} \dots i'_{\alpha+\beta}) \dots$$

então $g' = \tilde{g} g \tilde{g}^{-1}$ onde, escrevendo $\sigma_{\tilde{g}}[i_r] = i'_r$,

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_\alpha & i_{\alpha+1} & i_{\alpha+2} & \dots & i_{\alpha+\beta} & \dots \\ i'_1 & i'_2 & \dots & i'_\alpha & i'_{\alpha+1} & i'_{\alpha+2} & \dots & i'_{\alpha+\beta} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_{\tilde{g}}[1] & \sigma_{\tilde{g}}[2] & \dots & \sigma_{\tilde{g}}[n] \end{pmatrix}$$

■

IV – DIAGRAMAS DE YOUNG

Cada classe de conjugação fica assim determinada pela quantidade ν_1 de 1-ciclos, ν_2 de 2-ciclos, até ν_n de n -ciclos que é comum à estrutura cíclica de qualquer um dos seus elementos, i.e. fica referenciada por uma colecção de naturais $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n]$ onde $0 \leq \nu_i \leq n$ e $\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + n\nu_n = n$.

O número de elementos de cada classe de conjugação de S_n é $o[C_g] = \frac{o[S_n]}{o[H_g]}$ onde H_g é o grupo de estacionaridade de qualquer elemento de C_g , e

$$o[S_n] = n! \quad ; \quad o[H_g] = (1^{\nu_1} \nu_1!)(2^{\nu_2} \nu_2!)(3^{\nu_3} \nu_3!)\dots (n^{\nu_n} \nu_n!) = \prod_{k=1}^n k^{\nu_k} \nu_k!$$

De facto, para $\varsigma = (i_1 i_2 \dots i_k)$ um **K-CICLO** qualquer, as permutações que o deixam invariante por conjugação são as k rotações ς^j , $j = 1, 2, \dots, k$. Por exemplo, se:

$$\begin{aligned} \varsigma &= (1324) & \varsigma \varsigma^{-1} &= (3241) = \varsigma \\ \varsigma^2 &= (12)(34) = (\varsigma^2)^{-1} & \varsigma^2 \varsigma (\varsigma^2)^{-1} &= (2413) = \varsigma \\ \varsigma^3 &= (1423) = \varsigma^{-1} & \varsigma^3 \varsigma (\varsigma^3)^{-1} &= (4132) = \varsigma \\ \varsigma^4 &= (1)(2)(3)(4) = e & \varsigma^4 \varsigma (\varsigma^4)^{-1} &= (1324) = \varsigma \end{aligned}$$

então

Numa permutação com v_k k -ciclos, para além das $k \times k \times \dots \times k = k^{v_k}$ combinações independentes destas rotações, existem ainda as permutações completas dos k -ciclos $\varsigma_1 \varsigma_2 \dots \varsigma_{v_k}$ entre si, i.e. $(v_k!)$ permutações de v_k índices, representando as permutações que trocam os elementos na posição j de cada k -ciclo, para a mesma posição j noutra determinado k -ciclo. Por exemplo, as permutações g que deixam simultaneamente invariantes os três 2-ciclos (13), (26) e (45) (embora a sua posição relativa possa mudar) são as $v_2! = 3! = 6$ seguintes:

$$g(13)(45)(26)g^{-1} = \begin{cases} (26)(13)(45) & \Rightarrow g = (124)(36) \\ (26)(45)(13) & \Rightarrow g = (12)(36) \\ (45)(26)(13) & \Rightarrow g = (142)(356) \\ (45)(13)(26) & \Rightarrow g = (14)(35) \\ (13)(26)(45) & \Rightarrow g = (24)(56) \\ (13)(45)(26) & \Rightarrow g = e \end{cases}$$

Assim podemos confirmar que o número de elementos em cada classe de conjugação de S_4 é

$$\begin{aligned} v_1 = 4 & \rightarrow C_{4000} = \left\{ (1)(2)(3)(4) \right\} & \left(\frac{4!}{4!} = 1 \right) \\ \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_2 = 1 \end{cases} & \rightarrow C_{2100} = \left\{ (1)(2)(34), (1)(23)(4), (1)(24)(3), (12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3) \right\} & \left(\frac{4!}{2!2} = 6 \right) \\ v_2 = 2 & \rightarrow C_{0200} = \left\{ (12)(34), (13)(24), (14)(23) \right\} & \left(\frac{4!}{2!2^2} = 3 \right) \\ \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_3 = 1 \end{cases} & \rightarrow C_{1010} = \left\{ (1)(234), (1)(243), (123)(4), (124)(3), (132)(4), (134)(2), (142)(3), (143)(2) \right\} & \left(\frac{4!}{3} = 8 \right) \\ v_4 = 1 & \rightarrow C_{0001} = \left\{ (1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432) \right\} & \left(\frac{4!}{4} = 6 \right) \end{aligned}$$

Designando por $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ a colecção de naturais tal que

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot v \quad \text{ou seja} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ \lambda_2 &= v_2 + \dots + v_n \\ &\vdots \\ \lambda_n &= v_n \end{aligned}$$

verifica-se também $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n$ e é portanto uma **PARTIÇÃO** de n . Assim, cada classe de conjugação fica igualmente determinada por cada partição de n , porque de $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ se obtém unívocamente o número de k -ciclos existente na classe de conjugação que lhe corresponde, através de:

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ v_2 &= \lambda_2 - \lambda_3 \\ &\vdots \\ v_n &= \lambda_n \end{aligned}$$

Uma forma de representar gráficamente as partições $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ é através de um **DIAGRAMA DE YOUNG**. Por exemplo, o grupo simétrico S_6 possui $6! = 720$ elementos. A classificação das suas classes de conjugação é impraticável fazendo os produtos um a um, mas podemos desde já dizer quantas há e que tipo de

elementos tem. As partições possíveis de $n = 6$ são dadas pelos λ_i , os k -ciclos que as compõem por ν_k e as cardinalidades das classes de conjugação C_α por $c_\alpha = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n k^{\nu_k} \nu_k!}$:

C_α	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5	ν_6	c_α
1	6						6						1
2	5	1					4	1					15
3	4	2					2	2					45
4	4	1	1				3		1				40
5	3	3						3					15
6	3	2	1				1	1	1				120
7	3	1	1	1			2			1			90
8	2	2	2						2				40
9	2	2	1	1				1		1			90
10	2	1	1	1	1		1				1		144
11	1	1	1	1	1	1						1	120

Concluimos assim que S_6 possui 11 classes de conjugação distintas. Os **DIAGRAMAS DE YOUNG** associados às diferentes classes C_α são representáveis pelos seguintes exemplos (ordem de números inscritos irrelevante)

$$\begin{array}{l}
 C_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \quad (6) \\
 C_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad (5) \\
 C_3 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (4) \\
 C_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 C_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 C_6 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 C_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 6 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 C_8 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 C_9 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 C_{10} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 6 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 C_{11} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

2.6 Problemas da Parte II

PROBLEMA II-1: TRANSFORMAÇÕES PROJECTIVAS

A **RAZÃO ANARMÓNICA** entre 4 pontos P_1, P_2, P_3, P_4 numa recta é definida como

$$k = \frac{P_1 P_2 : P_3 P_2}{P_1 P_4 : P_3 P_4},$$

onde $P_i P_j$ representa a distância entre os pontos i, j . Mostre que esta razão é **INVARIANTE** para transformações **PROJECTIVAS** de \mathbb{R} definidas por

$$x \rightarrow x' = \frac{x\alpha + \beta}{x\gamma + \delta}$$

onde $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Verifique se as transformações indicadas formam um grupo.

SOLUÇÃO II-1

A transformação indicada de \mathbb{R} pode ser encarada como uma transformação do espaço projectivo

$$\mathbb{P}_1 = \left\{ \zeta_x = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\},$$

associada a uma transformação linear $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ de \mathbb{R}^2 e uma homotetia $\eta_A[x] = \frac{1}{x\gamma + \delta}$ de \mathbb{R} . Assim, podemos escrever

$$\Pi_A[x] = \eta_A[x] \pi_1 \circ A[\zeta_x]$$

onde π_1 é a projecção da 1ª componente dum vector de \mathbb{R}^2 .

Então a distância entre dois pontos na recta transformada é

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2\alpha + \beta}{x_2\gamma + \delta} - \frac{x_1\alpha + \beta}{x_1\gamma + \delta} = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\lambda_A[x_1]\lambda_A[x_2]}(x_2 - x_1)$$

onde pusemos $\lambda_A[x] = x\gamma + \delta$. Isto significa que

$$k' = \frac{P'_1 P'_2 : P'_3 P'_2}{P'_1 P'_4 : P'_3 P'_4} = \left(\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\lambda_A[x_1]\lambda_A[x_2]}(x_2 - x_1) \right) \left(\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)}{\lambda_A[x_3]\lambda_A[x_4]}(x_4 - x_3) \right) = \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3)}{(x_2 - x_3)(x_4 - x_1)} = k$$

A composição de transformações projectivas é

$$\Pi_{A'}[\Pi_A[x]] = \frac{\frac{(x\alpha + \beta)\alpha'}{x\gamma + \delta} + \beta'}{\frac{(x\alpha + \beta)\gamma'}{x\gamma + \delta} + \delta'} = \frac{x(\alpha\alpha' + \gamma\beta') + (\beta\alpha' + \delta\beta')}{x(\alpha\gamma' + \gamma\delta') + (\beta\gamma' + \delta\delta')}$$

que podemos ver que é da forma $\Pi_{A'A}[x]$ já que

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \gamma\beta' & \beta\alpha' + \delta\beta' \\ \alpha\gamma' + \gamma\delta' & \beta\gamma' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Por isso a primeira condição de grupo está verificada: $\Pi_{A'} \circ \Pi_A = \Pi_{A'A}$. A existência de um elemento neutro Π_E com $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fica assim verificada também: $\Pi_E \circ \Pi_A = \Pi_{E.A} = \Pi_A$. A associatividade fica garantida pela associatividade do produto de matrizes. A existência de inverso é garantida pela condição $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv \det[A] \neq 0$. Por isso,

$$\Pi_A^{-1}[x] = \Pi_{A^{-1}}[x] = - \begin{pmatrix} x\delta - \beta \\ x\gamma - \alpha \end{pmatrix}$$

PROBLEMA II-2: GERADORES DE GRUPOS

Qual é a ordem de um grupo $G \doteq \langle x, y \rangle$ gerado por dois elementos x, y sujeitos às relações

$$x^3 = y^2 = (xy)^2 = 1$$

Determine os sub-grupos de G .

SOLUÇÃO II-2

De acordo com as regras definidoras, conclui-se que

$$x^{-1} = x^2; y^{-1} = y; (xy)^{-1} = xy; (yx)^{-1} = yx$$

Para mais $xyx = y$ e $yxy = x^2$, pelo que $yx^2 = xy$ e $x^2y = yx$, pelo que não existem mais elementos no grupo. Assim

$$G = \{e, x, x^2, y, xy, yx\}$$

Quanto aos sub-grupos, são

$$G \quad ; \quad \{e, x, x^3\} \simeq \mathbb{Z}_3 \quad ; \quad \{e, y\} \simeq \mathbb{Z}_2 \quad ; \quad \{e, xy\} \simeq \mathbb{Z}_2 \quad ; \quad \{e, yx\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

PROBLEMA II-3: SUB-GRUPOS NORMAIS

Qual é a ordem de um grupo $G \doteq \langle x, y \rangle$ gerado por dois elementos x, y sujeitos às relações

$$x^3 = y^2 = (xy)^3 = 1$$

Determine os sub-grupos **NORMAIS** de G .

SOLUÇÃO II-3

De acordo com as regras definidoras, conclui-se que

$$x^{-1} = x^2 \quad ; \quad y^{-1} = y \quad ; \quad (xy)^{-1} = (xy)^2 = yx^2 \quad ; \quad (yx)^{-1} = (yx)^2 = x^2y$$

Portanto, os diferentes elementos de G são:

Comprimento 1: e, x, y .

Comprimento 2: x^2, xy, yx .

Comprimento 3: x^2y, yx^2, xyx, yxy .

Comprimento 4: x^2yx, xyx^2 (O elemento $yx^2y = xyx$ já foi contabilizado.)

O grupo não possui elementos de comprimento 5 porque $x^2yx^2 = yxy$ e $yx^2yx^2 = x^2yx$. Os pares de elementos inversos são:

$$\begin{array}{ll} e \leftrightarrow e = e^{-1} & xy \leftrightarrow yx^2 = y^{-1}x^{-1} \\ x \leftrightarrow x^2 = x^{-1} & yx \leftrightarrow x^2y = x^{-1}y^{-1} \\ y \leftrightarrow y = y^{-1} & xyx \leftrightarrow yxy = x^{-1}y^{-1}x^{-1} \\ & x^2yx \leftrightarrow x^2yx = x^{-1}y^{-1}(x^2)^{-1} \\ & xyx^2 \leftrightarrow xyx^2 = (x^2)^{-1}y^{-1}x^{-1} \end{array}$$

Observe que estes pares têm de estar juntos dentro ou fora de cada sub-grupo de G . Além disso, os sub-grupos têm que ter cardinalidade divisora de $\#G = 12$. Assim, procuremos sub-grupos próprios de ordem 1, 2, 3, 4 e 6

$$\begin{array}{llll} H_2 = \{e, y\} & & H_3 = \{e, x, x^2\} & \\ H_1 = \{e\} & H_2 = \{e, x^2yx\} & H_3 = \{e, xy, yx^2\} & H_4 = \{e, y, x^2yx, xyx^2\} \\ & H_2 = \{e, xyx^2\} & H_3 = \{e, yx, x^2y\} & \end{array}$$

Não existe sub-grupo de ordem 6.

A determinação de um sub-grupo normal pode teoricamente ser feita através do **COMUTADOR**

$$[G, G] = \langle [g, g'] = gg'(g'g)^{-1} \rangle_{g \in G}.$$

O sub-grupo gerado por este espaço é **NORMAL** porque, se $n \in [G, G]$, então $n = n_1 n_2 \dots n_m$ onde cada n_i é da forma $n_i = g_i g'_i (g'_i g_i)^{-1}$. Como a conjugação é distributível em relação ao produto, basta mostrar que, para $n = gg'(g'g)^{-1}$ e $\forall k \in G$, $knk^{-1} = k(gg'(g'g)^{-1})k^{-1} = \tilde{g}\tilde{g}'(\tilde{g}'\tilde{g})^{-1}$ onde $\tilde{g} = (kgk^{-1})$ e análogamente para \tilde{g}' .

Mas na prática torna-se mais fácil determinar sub-grupos que sejam soma directa de classes de conjugação completas de G .

$$\begin{array}{l} C_1 = \{1\} \\ C_2 = \{x^2yx, xyx^2, y\} \\ C_3 = \{x, yx, xy, yxy\} \\ C_4 = \{xyx, x^2, yx^2, x^2y\} \end{array}$$

A tabela de multiplicação de classes é

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4
C_2	C_2	$3C_1 \oplus 2C_2$	$3C_3$	$3C_4$
C_3	C_3	$3C_3$	$4C_4$	$4C_1 \oplus 4C_2$
C_4	C_4	$3C_4$	$4C_1 \oplus 4C_2$	$4C_3$

O único candidato é $H_4 \equiv C_1 \oplus C_2$ já que C_1 e C_2 são as únicas classes contêm os próprios inversos e cujo produto é fechado.

PROBLEMA II-4: GERADORES DO GRUPO QUATERNIÓNICICO Q

Seja $Q \doteq \langle a, b \rangle$ o grupo **QUATERNIÓNICICO** gerado por produto de matrizes

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

onde $i^2 = -1$. Caracterize Q e os seus sub-grupos, e mostre que Q é **ISOMORFO** ao grupo gerado por elementos k_o, k_1, k_2, k_3 que verificam

$$k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = k_o \quad ; \quad k_1 k_2 = k_3 \quad ; \quad k_2 k_3 = k_1 \quad ; \quad k_3 k_1 = k_2 \quad ; \quad k_o^2 = 1$$

SOLUÇÃO II-4

Aqui, verifica-se que $a^4 = 1 = b^4$ pelo que

$$G = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 1 & , & a & , & a^2 = b^2 & , & a^3 = a^{-1} & , & b & , & b^3 = b^{-1} & , & ab & , & ba = (ab)^{-1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] & , & \left[\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right] & , & \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right] & , & \left[\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right] & , & \left[\begin{array}{cc} 0 & i \\ i & 0 \end{array} \right] & , & \left[\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array} \right] & , & \left[\begin{array}{cc} i & 0 \\ 0 & -i \end{array} \right] & , & \left[\begin{array}{cc} -i & 0 \\ 0 & i \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

i.e.

$$G = \{1, k_o = k_o^{-1} = a^2 \equiv b^2, k_1 = a, k_1^{-1} = a^3, k_2 = b, k_2^{-1} = b^3, k_3 = ab, k_3^{-1} = ba\}$$

O grupo Q tem ordem 8 e é **NÃO-ABELIANO**. Sub-grupos (ordens 1, 2 e 4) são:

$$\begin{array}{lll} H_1 = \{1\} & H_2 = \{1, k_o\} & H_4 = \{1, k_o, k_1, k_1^{-1}\} \\ & & H_4 = \{1, k_o, k_2, k_2^{-1}\} \\ & & H_4 = \{1, k_o, k_3, k_3^{-1}\} \end{array}$$

PROBLEMA II-5: GRUPO MATRICIAL

Seja $T \doteq \langle a, b \rangle$ o grupo gerado por produto de matrizes

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Caracterize T e os seus sub-grupos, e mostre que T **NÃO É ISOMORFO** ao grupo quaterniônico do problema anterior.

PROBLEMA II-6: GRUPOS DIÉDRICOS

Os grupos **DIÉDRICOS** D_k são gerados por elementos a, b sujeitos a relações

$$a^2 = b^k = (ab)^2 = 1 (k \geq 3)$$

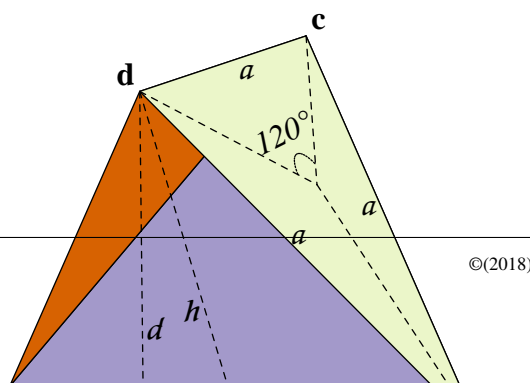
Mostre que D_k é isomorfo ao grupo multiplicativo gerado pelas matrizes complexas

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{bmatrix}$$

onde $\xi = e^{\frac{2\pi}{k}i}$. Determine as classes de conjugação de D_k . Mostre que D_4 é isomorfo ao grupo T do problema anterior.

PROBLEMA II-7: MOLÉCULA DE METANO E GRUPO T_d .

A molécula de metano CH_4 tem as simetrias de um tetraedro regular. Determine e classifique os elementos do grupo de simetrias discreto do tetraedro em termos de rotações em torno de eixos e reflexões em planos de simetria. Calcule as suas classes de conjugação e determine os seus sub-grupos. Verifique se existem sub-grupos invariantes, e se o grupo é um



– Elementos de Geometria do Tetraedro

As relações entre as dimensões do tetraedro são as seguintes:

Altura de cada face	Distância entre arestas	Ângulo diedral entre faces	Inclinação aresta/face
$h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$d = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$\theta = 2 \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx 70.53^\circ$	$\vartheta = \tan^{-1} (\sqrt{2}) \approx 54.73^\circ$

(i)– Simetrias de T_d

O tetraedro possui simetrias com as seguintes ordens, para além da transformação idêntica e de ordem 1 :

[ORDEM 2] 6 simetrias de reflexão $\{\pi_{ab}, \pi_{ac}, \pi_{ad}, \pi_{bc}, \pi_{bd}, \pi_{cd}\}$.

constituídas por reflexões em planos bissectores dos diedros formados pelas faces, cada um passando pela aresta que o indexa e perpendicularmente à aresta oposta. Estes elementos coincidem com os seus inversos porque $\pi_{\alpha\beta}^2 = e$.

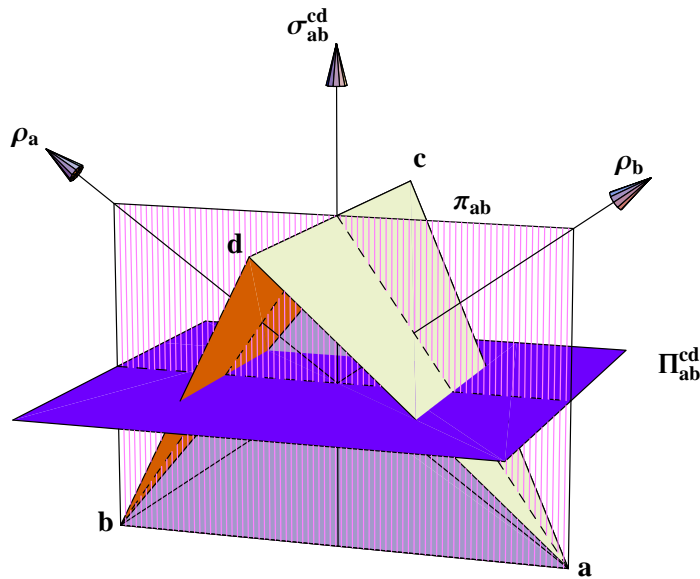
[ORDEM 2] 3 simetrias de rotação $\{\sigma_{ab}^{cd}, \sigma_{ac}^{bd}, \sigma_{ad}^{bc}\}$.

constituídas por rotações de $\pi = 180^\circ$ em torno de eixos passando pelo centro e perpendiculares a pares de arestas opostas $e_{ab}^{cd} \perp \{ab, cd\}$, $e_{ac}^{bd} \perp \{ac, bd\}$, $e_{ad}^{bc} \perp \{ad, bc\}$. Estes elementos coincidem com os seus inversos.

$$\left(\sigma_{ab}^{cd}\right)^{-1} = \sigma_{ab}^{cd} \quad ; \quad \left(\sigma_{ac}^{bd}\right)^{-1} = \sigma_{ac}^{bd} \quad ; \quad \left(\sigma_{ad}^{bc}\right)^{-1} = \sigma_{ad}^{bc}$$

É fácil de ver que

$$\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \sigma_{\alpha\delta}^{\beta\gamma} \sigma_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} = e \quad ; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \pi_{\gamma\delta} \quad ; \quad \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \pi_{\gamma\delta} = \pi_{\gamma\delta} \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \pi_{\alpha\beta} \quad .$$



©AJRS' 2004

[ORDEM 3] 4 simetrias de rotação $\{\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d\}$ e respectivas inversas $\rho_a^{-1} = \rho_a^2$

constituídas por rotações de $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ em torno de eixos passando por cada vértice e o centro de cada face. Os inversos destes elementos são os seus quadrados

$$(\rho_a)^{-1} = \rho_a^2 \quad ; \quad (\rho_b)^{-1} = \rho_b^2 \quad ; \quad (\rho_c)^{-1} = \rho_c^2 \quad ; \quad (\rho_d)^{-1} = \rho_d^2$$

Embora mais difícil de ver, os produtos

$$\begin{cases} \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma = e & \text{se } (\alpha\beta\gamma) \text{ percorrer os vértices de uma face no sentido directo} \\ \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\gamma = \sigma_{\alpha\gamma}^{\beta\delta} & \text{se } (\alpha\beta\gamma) \text{ percorrer os vértices de uma face no sentido retrógrado} \end{cases}$$

[ORDEM 4] 3 simetrias de rotação-reflexão $\{\eta_{ab}^{cd}, \eta_{ac}^{bd}, \eta_{ad}^{bc}\}$ e respectivas inversas $(\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})^{-1} = (\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})^3$

constituídos por rotações de $\frac{2\pi}{4} = 90^\circ$ em torno dum dos três eixos $e_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ seguidas de uma reflexão no plano $\Pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ que passa pelo centro do tetraedro e é perpendicular ao eixo de rotação. É fácil de ver que cada uma destas simetrias repetida duas vezes dá uma rotação ordinária $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ de $\pi = 180^\circ$ em torno do respectivo eixo, e repetida quatro vezes dá a identidade. Os inversos destes elementos são os seus cubos.

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{cd} &= (\eta_{ab}^{cd})^2 & (\eta_{ab}^{cd})^{-1} &= (\eta_{ab}^{cd})^3 \\ \sigma_{ac}^{bd} &= (\eta_{ac}^{bd})^2 & (\eta_{ac}^{bd})^{-1} &= (\eta_{ac}^{bd})^3 \\ \sigma_{ad}^{bc} &= (\eta_{ad}^{bc})^2 & (\eta_{ad}^{bc})^{-1} &= (\eta_{ad}^{bc})^3 \end{aligned}$$

Tem ao todo 24 simetrias. Convém reparar que a identificação destas simetrias é fixa, i.e. embora as etiquetas $\{a, b, c, d\}$ mudem de sítio, as simetrias correspondem ao eixos definidos com as etiquetas na posição inicial!

(ii)– **Correspondência bijectiva com S_4**

A cardinalidade do grupo T_d é assim $1 + 3 + 2 \times 4 + 6 + 2 \times 3 = 24$. Isto é o mesmo que a cardinalidade de S_4 , e de facto podemos em princípio tentar identificar os dois grupos.

Assim sendo, podemos começar por identificar as 6 simetrias de reflexão $\pi_{\alpha\beta}$ como as transposições que deixam fixos α e β , i.e. associando lexicograficamente $\{a, b, c, d\}$ com $\{1, 2, 3, 4\}$,

$$\begin{aligned} \pi_{ab} &\Leftrightarrow (1)(2)(34) \\ \pi_{ac} &\Leftrightarrow (1)(3)(24) \\ \pi_{ad} &\Leftrightarrow (1)(4)(23) \\ \pi_{bc} &\Leftrightarrow (2)(3)(14) \\ \pi_{bd} &\Leftrightarrow (2)(4)(13) \\ \pi_{cd} &\Leftrightarrow (3)(4)(12) \end{aligned}$$

De seguida, os restantes elementos de ordem 2, as simetrias de rotação $\sigma_{\alpha\beta}$, podem ser associadas a pares de transposições dos vértices que definem os eixos de rotação, i.e.

$$\begin{aligned} \sigma_{ab}^{cd} &\Leftrightarrow (12)(34) \\ \sigma_{ac}^{bd} &\Leftrightarrow (13)(24) \\ \sigma_{ad}^{bc} &\Leftrightarrow (14)(23) \end{aligned}$$

As simetrias de rotação ρ_α são de ordem 3 e portanto devem ser 3-ciclos deixando fixo o vértice que define o eixo da simetria.

$$\begin{aligned} \rho_a &\Leftrightarrow (1)(234) & \rho_a^{-1} &\Leftrightarrow (1)(243) \\ \rho_b &\Leftrightarrow (2)(143) & \rho_b^{-1} &\Leftrightarrow (2)(134) \\ \rho_c &\Leftrightarrow (3)(124) & \rho_c^{-1} &\Leftrightarrow (3)(142) \\ \rho_d &\Leftrightarrow (4)(132) & \rho_d^{-1} &\Leftrightarrow (4)(123) \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

Finalmente, as simetrias de rotação-reflexão $\eta_{\alpha\beta}$ de ordem 4 identificam-se com 4-ciclos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \eta_{ab}^{cd} &\Leftrightarrow (1423) & \Rightarrow & \left(\eta_{ab}^{cd}\right)^2 &\Leftrightarrow (12)(34) & \Rightarrow & \left(\eta_{ab}^{cd}\right)^{-1} &\Leftrightarrow (1324) \\ \eta_{ac}^{bd} &\Leftrightarrow (1234) & & \left(\eta_{ac}^{bd}\right)^2 &\Leftrightarrow (13)(24) & & \left(\eta_{ac}^{bd}\right)^{-1} &\Leftrightarrow (1432) \\ \eta_{ad}^{bc} &\Leftrightarrow (1342) & & \left(\eta_{ad}^{bc}\right)^2 &\Leftrightarrow (14)(23) & & \left(\eta_{ad}^{bc}\right)^{-1} &\Leftrightarrow (1243) \end{aligned}$$

(iii)– **Isomorfismo com S_4**

Feitas estas identificações, vamos mostrar que $T_d \simeq S_4$. Para isso, basta encontrar um isomorfismo entre os geradores. Note-se que S_n pode ser gerado a partir de uma base com duas permutações apenas (uma transposição (12) e um n-ciclo (123...n)), mas em geral usa-se uma base com $n - 1$ transposições adjacentes. No caso de S_4 um conjunto (não mínimo) de geradores são as transposições (12), (23), (34). Para provar o isomorfismo indicado, teremos que mostrar que, por exemplo, $\pi_{cd}, \pi_{ad}, \pi_{ab}$ geram todos os elementos de T_d e que a correspondência com as permutações indicadas preserva o produto entre geradores. Os produtos relevantes são:

$$\begin{aligned}\pi_{ad}\pi_{ab} &= (\pi_{ab}\pi_{ad})^{-1} = \rho_a \\ \pi_{ad}\pi_{cd} &= (\pi_{cd}\pi_{ad})^{-1} = \rho_d \\ \pi_{ab}\pi_{cd} &= \pi_{cd}\pi_{ab} = \sigma_{ab}^{cd}\end{aligned}$$

Por exemplo $\pi_{cd}\pi_{ad}$ é uma simetria que fixa apenas d , donde só pode ser ρ_d ou $(\rho_d)^{-1}$. A ordem aqui é importante, e de facto

$$\pi_{cd}\pi_{ad} = \rho_d^{-1} \Leftrightarrow (12)(23) = (123) \quad \text{enquanto} \quad \pi_{ad}\pi_{cd} = \rho_d \Leftrightarrow (23)(12) = (132) .$$

Produtos de dois elementos $\pi_{\alpha\beta}\pi_{\gamma\delta}$ sem repetição nos índices trocam pares de vértices disjuntos, por isso devem ser do tipo $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$. Assim temos efectivamente

$$\pi_{ab}\pi_{cd} = \pi_{cd}\pi_{ab} = \sigma_{ab}^{cd} \Leftrightarrow (12)(34)$$

já que a ordem é irrelevante aqui.

Tendo provado que a correspondência com S_4 preserva o produto entre $\pi_{cd}, \pi_{ad}, \pi_{ab}$ falta verificar se estes são de facto geradores de T_d , i.e. todos os elementos de T_d devem ser produtos de cópias destes três.

Começemos por notar que π_{ad} troca os vértices ($b \Leftrightarrow c$), correspondendo a $\begin{pmatrix} abc d \\ ac b d \end{pmatrix}$, seguido de π_{ab} que troca vértices ($d \Leftrightarrow c$), o que dá $\begin{pmatrix} abc d \\ ad b c \end{pmatrix}$, e seguido de π_{ad} ($b \Leftrightarrow c$) que resulta em $\begin{pmatrix} abc d \\ ad c b \end{pmatrix}$, i.e. a e c ficam invariantes, por isso deve ser

$$\pi_{ac} = \pi_{ad}\pi_{ab}\pi_{ad}.$$

De forma idêntica

$$\pi_{bd} = \pi_{cd}\pi_{ad}\pi_{cd} \quad ; \quad \pi_{bc} = \pi_{ab}\pi_{bd}\pi_{ab},$$

pelo que todas as reflexões com dois vértices fixos são produtos desta base de $\pi_{\alpha\beta}$.

Para as rotações ρ_α onde fica um vértice fixo, é fácil ver que $\rho_\alpha = \pi_{\alpha\beta}\pi_{\alpha\gamma}$ se $\beta \rightarrow \gamma$ for uma rotação directa da face oposta a α , e os correspondentes inversos para rotações retrógradas. Por exemplo:

$$\begin{aligned}\pi_{ab}\pi_{ac} = \rho_a &\Leftrightarrow (34)(24) = (234) \\ \pi_{bc}\pi_{ba} = \rho_b &\Leftrightarrow (14)(34) = (143) \\ \pi_{cb}\pi_{cd} = \rho_c &\Leftrightarrow (14)(12) = (241) \\ \pi_{da}\pi_{dc} = \rho_d &\Leftrightarrow (23)(12) = (132)\end{aligned}$$

Quanto às rotações $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ existem 3 coincidentes com as suas inversas, e são todas geradas por produtos de pares $\pi_{\alpha\beta}\pi_{\gamma\delta}$ quando $\alpha\beta$ é disjunto de $\gamma\delta$.

Quaisquer produtos de três reflexões diferentes são do tipo $\pi_{\alpha\beta}\pi_{\gamma\delta}\pi_{\kappa\tau}$ e têm dois índices repetidos em pares diferentes (só há 4 vértices): por exemplo $\pi_{\alpha\beta}\pi_{\alpha\gamma}\pi_{\beta\delta}$ ou $\pi_{\beta\delta}\pi_{\alpha\delta}\pi_{\alpha\gamma}$. Vemos portanto que são da forma $\rho_\alpha\pi_{\beta\delta}$, $\pi_{\beta\delta}\rho_\alpha$ ou os seus inversos. É fácil de ver que esta sequência de simetrias equivale a um $\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ (ou ao seu inverso) e qualquer simetria destas se escreve nesta forma.

Tomemos $\pi_{bc}\rho_a$ por exemplo: ρ_a começa por fixar a e rodar (b, c, d) ficando $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{pmatrix}$ e a seguir π_{bc} ($a \Leftrightarrow d$) resulta na permuta c (que está na posição original de d) com a , ficando $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$. Esta configuração corresponde a η_{ab}^{cd} . Assim, na correspondência das simetrias $\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ com 4-ciclos que se podem decompor num produto de transposições adequadas, confirma-se que

$$\begin{aligned}\eta_{ab}^{cd} = \pi_{bc}\pi_{ac}\pi_{ad} &\Leftrightarrow (14)(24)(23) = (1423) \\ \eta_{ac}^{bd} = \pi_{cd}\pi_{ad}\pi_{ab} &\Leftrightarrow (12)(23)(34) = (1234) \\ \eta_{ad}^{bc} = \pi_{bd}\pi_{ab}\pi_{ac} &\Leftrightarrow (13)(34)(24) = (1342)\end{aligned}$$

(iv)– CLASSES DE CONJUGAÇÃO DE T_d

Com isto mostrámos que as classes de conjugação de T_d devem ser as mesmas que em S_4 , i.e.

$$\begin{array}{ccccc} C_1 = \{e\} & C_2 = \{\pi_{\alpha\beta}\} & C_3 = \{\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\} & C_4 = \{\rho_\alpha\} & C_5 = \{\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}\} \\ (c_1 = 1) & (c_2 = 6) & (c_3 = 3) & (c_4 = 8) & (c_5 = 6)\end{array}$$

(v)– SUB-GRUPOS DE T_d

A determinação de sub-grupos pode ser feita olhando para os vários índices possíveis. A ordem dum sub-grupo deve ser divisora da ordem de T_d . Podemos em princípio ter sub-grupos próprios de ordem 12 (índice=2), 8 (índice=3), 6 (índice=4), 4 (índice=6), 3 (índice=8), 2 (índice=12).

[9 DE INDICE 12] Os sub-grupos de ordem 2 são formados pela identidade e um elemento cíclico de ordem 2. Estes são os 9 sub-grupos gerados por cada elemento em

$$\left\{ \pi_{ab}, \pi_{ac}, \pi_{ad}, \pi_{bc}, \pi_{bd}, \pi_{cd}, \sigma_{ab}^{cd}, \sigma_{ac}^{bd}, \sigma_{ad}^{bc} \right\}.$$

Em particular os $H_{\alpha\beta} = \{e, \pi_{\alpha\beta}\}$ são grupos de estacionaridade de dois vértices.

[4 DE INDICE 8] Os 4 sub-grupos cíclicos de ordem 3 são gerados por cada um dos 4 elementos em $\{\rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d\}$. Por exemplo $\{e, \rho_a, \rho_a^{-1} = \rho_a^2\}$ tem tabela de multiplicação

e	ρ_a	ρ_a^{-1}
ρ_a	ρ_a^{-1}	e
ρ_a^{-1}	e	ρ_a

[7 DE INDICE 6] Existem três tipos diferentes de sub-grupos cíclicos de ordem 4 num total de 7. Os elementos de $\{\eta_{ab}^{cd}, \eta_{ac}^{bd}, \eta_{ad}^{bc}\}$ geram 3 sub-grupos, que correspondem a sub-grupos formados por pares de simetrias $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ e $\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ com o mesmo eixo $e_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$. Note-se que $(\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})^2 = \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$. Deixando cair os índices superiores para simplificar, a tabela de multiplicação de um destes sub-grupos é:

e	σ_{ac}	η_{ac}	η_{ac}^{-1}
σ_{ac}	e	η_{ac}^{-1}	η_{ac}
η_{ac}	η_{ac}^{-1}	σ_{ac}	e
η_{ac}^{-1}	η_{ac}	e	σ_{ac}

Os pares de simetrias $\pi_{\alpha\beta}$ disjuntas formam outros 3 sub-grupos, com elementos da forma $\{e, \pi_{\alpha\beta}, \pi_{\gamma\delta}, \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \pi_{\alpha\beta} \pi_{\gamma\delta}\}$. Um exemplo de tabela de multiplicação é

e	π_{ad}	π_{bc}	σ_{ad}
π_{ad}	e	σ_{ad}	π_{bc}
π_{bc}	σ_{ad}	e	π_{ad}
σ_{ad}	π_{bc}	π_{ad}	e

Adicionalmente, o conjunto das rotações $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ de 180° em torno de eixos ortogonais $e_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ formam um sub-grupo normal $N_4 = C_1 \oplus C_3$ com tabela de multiplicação:

e	σ_{ab}	σ_{ac}	σ_{ad}
σ_{ab}	e	σ_{ad}	σ_{ac}
σ_{ac}	σ_{ad}	e	σ_{ab}
σ_{ad}	σ_{ac}	σ_{ab}	e

[4 DE INDICE 4] Sub-grupos de ordem 6 existem 4 diferentes, isomorfos a S_3 , e são constituídos por simetrias que fixam um ponto: por exemplo, para a fixo $H_a = \{e, \pi_{ab}, \pi_{ac}, \pi_{ad}, \rho_a, \rho_a^{-1}\}$. A respectiva tabela de multiplicação será:

e	π_{ab}	π_{ac}	π_{ad}	ρ_a	ρ_a^{-1}
π_{ab}	e	ρ_a	ρ_a^{-1}	π_{ac}	π_{ad}
π_{ac}	ρ_a^{-1}	e	ρ_a	π_{ad}	π_{ab}
π_{ad}	ρ_a	ρ_a^{-1}	e	π_{ab}	π_{ac}
ρ_a	π_{ad}	π_{ab}	π_{ac}	ρ_a^{-1}	e
ρ_a^{-1}	π_{ac}	π_{ad}	π_{ab}	e	ρ_a

[3 DE INDICE 3] Sub-grupos de ordem 8 podem ser formados por produtos semi-directos de cada um dos cíclicos $H_{\alpha\beta}$ de ordem 2 com N_4 , havendo 3 no total, sendo um exemplo

$$K_{ab} = N_4 \times H_{ab} = \{e, \pi_{ab}, \pi_{cd}, \sigma_{ab}, \sigma_{ac}, \sigma_{ad}, \eta_{ab}, \eta_{ab}^{-1}\}$$

e	π_{ab}	π_{cd}	σ_{ab}	σ_{ac}	σ_{ad}	η_{ab}	η_{ab}^{-1}
π_{ab}	e	σ_{ab}	π_{cd}	η_{ab}	η_{ab}^{-1}	σ_{ac}	σ_{ad}
π_{cd}	σ_{ab}	e	π_{ab}	η_{ab}^{-1}	η_{ab}	σ_{ad}	σ_{ac}
σ_{ab}	π_{cd}	π_{ab}	e	σ_{ad}	σ_{ac}	η_{ab}^{-1}	η_{ab}
σ_{ac}	η_{ab}^{-1}	η_{ab}	σ_{ad}	e	σ_{ab}	π_{cd}	π_{ab}
σ_{ad}	η_{ab}	η_{ab}^{-1}	σ_{ac}	σ_{ab}	e	π_{ab}	π_{cd}
η_{ab}	σ_{ad}	σ_{ac}	η_{ab}^{-1}	π_{ab}	π_{cd}	σ_{ab}	e
η_{ab}^{-1}	σ_{ac}	σ_{ad}	η_{ab}	π_{cd}	π_{ab}	e	σ_{ab}

[1 DE INDICE 2] Por outro lado, os 3 sub-grupos de ordem 4 não dão origem a nenhum novo sub-grupo por produto semi-directo com N_4 porque $(\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})^2 = \sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ e $(\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})^3 = (\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})^{-1}$, donde produtos do tipo $\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \sigma_{\mu\nu}^{\lambda\tau}$ são $(\eta_{\alpha\beta}^{\gamma\delta})^{-1}$ ou são $\pi_{\alpha\beta}$ ou $\pi_{\gamma\delta}$.

Os sub-grupos cíclicos de ordem 3 geram produtos semidirectos com N_4 que são todos coincidentes com o sub-grupo de rotações próprias (isomorfo ao alternante A_4).

$$T = \{e, \rho_a, \rho_a^{-1}\} \times N_4 = \{e, \rho_a, \rho_b, \rho_c, \rho_d, \rho_a^{-1}, \rho_b^{-1}, \rho_c^{-1}, \rho_d^{-1}, \sigma_{ab}, \sigma_{ac}, \sigma_{ad}\} = C_1 \oplus C_3 \oplus C_4$$

A respectiva tabela de multiplicação é interessante porque evidencia que qualquer sub-grupo envolvendo simultaneamente um par ρ_κ e $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ teria que incluir todos os restantes ρ_α e $\sigma_{\alpha\beta}$, e um sub-grupo envolvendo apenas rotações ρ_α ou é cíclico de ordem 3 ou é o

próprio T .

e	ρ_a	ρ_b	ρ_c	ρ_d	ρ_a^{-1}	ρ_b^{-1}	ρ_c^{-1}	ρ_d^{-1}	σ_{ab}	σ_{ac}	σ_{ad}
ρ_a	ρ_a^{-1}	ρ_d^{-1}	ρ_b^{-1}	ρ_c^{-1}	e	σ_{ad}	σ_{ab}	σ_{ac}	ρ_d	ρ_b	ρ_c
ρ_b	ρ_c^{-1}	ρ_b^{-1}	ρ_d^{-1}	ρ_a^{-1}	σ_{ad}	e	σ_{ac}	σ_{ab}	ρ_c	ρ_a	ρ_d
ρ_c	ρ_d^{-1}	ρ_a^{-1}	ρ_c^{-1}	ρ_b^{-1}	σ_{ab}	σ_{ac}	e	σ_{ad}	ρ_b	ρ_d	ρ_a
ρ_d	ρ_b^{-1}	ρ_c^{-1}	ρ_a^{-1}	ρ_d^{-1}	σ_{ac}	σ_{ab}	σ_{ad}	e	ρ_a	ρ_c	ρ_b
ρ_a^{-1}	e	σ_{ac}	σ_{ad}	σ_{ab}	ρ_a	ρ_c	ρ_d	ρ_b	ρ_c^{-1}	ρ_d^{-1}	ρ_b^{-1}
ρ_b^{-1}	σ_{ac}	e	σ_{ab}	σ_{ad}	ρ_d	ρ_b	ρ_a	ρ_c	ρ_d^{-1}	ρ_c^{-1}	ρ_a^{-1}
ρ_c^{-1}	σ_{ad}	σ_{ab}	e	σ_{ac}	ρ_b	ρ_d	ρ_c	ρ_a	ρ_a^{-1}	ρ_b^{-1}	ρ_d^{-1}
ρ_d^{-1}	σ_{ab}	σ_{ad}	σ_{ac}	e	ρ_c	ρ_a	ρ_b	ρ_d	ρ_b^{-1}	ρ_a^{-1}	ρ_c^{-1}
σ_{ab}	ρ_c	ρ_d	ρ_a	ρ_b	ρ_d^{-1}	ρ_c^{-1}	ρ_b^{-1}	ρ_a^{-1}	e	σ_{ad}	σ_{ac}
σ_{ac}	ρ_d	ρ_c	ρ_b	ρ_a	ρ_b^{-1}	ρ_a^{-1}	ρ_d^{-1}	ρ_c^{-1}	σ_{ad}	e	σ_{ab}
σ_{ad}	ρ_b	ρ_a	ρ_d	ρ_c	ρ_c^{-1}	ρ_d^{-1}	ρ_a^{-1}	ρ_b^{-1}	σ_{ac}	σ_{ab}	e

(vi)– **ISOMORFISMO ENTRE T E O SUB-GRUPO ALTERNANTE $A_4 \subset S_4$**

O único sub-grupo de índice 2 em S_4 é o grupo alternante A_4 de permutações pares. Para ver que é normal basta notar que é o grupo derivado $A_4 = [S_4, S_4]$. Se existisse outro sub-grupo N de índice 2, teria de ser normal também. Mas para isso se verificar teria de ser soma directa de classes de conjugação, e pelo menos uma delas teria de ser de permutações ímpares e outra de permutações pares (porque o produto de permutações ímpares é par). As classes de tipo ímpar têm ambas 6 elementos cada uma, enquanto as pares têm cardinalidades 1, 3 e 8. Não é possível formar um grupo com 12 elementos doutra forma que não A_4 . Assim, o sub-grupo de T_d de índice 2 é o conjunto formado pelas rotações próprias.

(vii)– **T_d COMO PRODUTO SEMI-DIRECTO $N_4 \times H_a$**

O grupo T_d pode ser encarado como o produto semidirecto do sub-grupo normal N_4 com um dos 4 sub-grupos de estacionaridade dum vértice, isomorfos a S_3 , por exemplo

$$T_d \simeq N_4 \times H_a = \{e, \sigma_{ab}^{cd}, \sigma_{ac}^{bd}, \sigma_{ad}^{bc}\} \times \{e, \pi_{ab}, \pi_{ac}, \pi_{ad}, \rho_a, \rho_a^{-1}\}$$

Pode ainda ser visto como um produto semidirecto $T_d \simeq T \times H_{\alpha\beta}$ do sub-grupo T com um dos 6 sub-grupos de estacionaridade de dois vértices formado por reflexões $\pi_{\alpha\beta}$, mas não com os formados por rotações $\sigma_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$, que já pertencem a T .

PROBLEMA II-8: GRUPO FINITO E GRUPO DE PERMUTAÇÕES

Dado um sub-grupo H de um grupo finito G , escolha um representante $t_i \in Hg_i$ de cada um dos n co-
conjuntos à direita de H em G . Determine o núcleo $Ker[\sigma]$ da correspondência

$$\sigma : G \rightarrow \mathcal{S}_n$$

$$g \mapsto \sigma_g = \begin{pmatrix} Ht_1 & Ht_2 & \dots & Ht_n \\ Ht_1g & Ht_2g & \dots & Ht_ng \end{pmatrix}$$

e mostre que é um sub-grupo. Verifique se é normal (ou em que condições o é).

SOLUÇÃO II-8

(i)– **NÚCLEO DE σ**

Para pertencer ao núcleo de σ o elemento g deve ser tal que, para todos os $i = 1, 2, \dots, n$, se tenha $Ht_i = Ht_i g$, o que é equivalente a afirmar que $g \in t_i^{-1} Ht_i$, ou seja

$$Ker[\sigma] = \bigcap_{i=1}^n t_i^{-1} Ht_i$$

Dois elementos $g, g' \in Ker[\sigma]$ multiplicados dão

$$gg' = (t_i^{-1} h_i t_i)(t_i^{-1} h'_i t_i) = t_i^{-1} (h_i h'_i) t_i \in Ker[\sigma]$$

Por outro lado $g^{-1} = (t_i^{-1} h_i^{-1} t_i) \in Ker[\sigma]$ e $e = (t_i^{-1} e t_i) \in Ker[\sigma]$, donde $Ker[\sigma]$ é um sub-grupo de G .

(ii)– **INVARIÂNCIA DE $Ker[\sigma]$**

Este grupo é normal porque σ é um morfismo de grupos já que

$$\begin{aligned} \sigma_g \sigma_{g'} &= \begin{pmatrix} Ht_1 & Ht_2 & \dots & Ht_n \\ Ht_1g & Ht_2g & \dots & Ht_ng \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ht_1 & Ht_2 & \dots & Ht_n \\ Ht_1g' & Ht_2g' & \dots & Ht_ng' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} Ht_1 & Ht_2 & \dots & Ht_n \\ Ht_1g & Ht_2g & \dots & Ht_ng \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ht_1g & Ht_2g & \dots & Ht_ng \\ Ht_1gg' & Ht_2gg' & \dots & Ht_ngg' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ht_1 & Ht_2 & \dots & Ht_n \\ Ht_1gg' & Ht_2gg' & \dots & Ht_ngg' \end{pmatrix} = \sigma_{gg'} \end{aligned}$$

Então para $g' \in G$ e $g \in Ker[\sigma]$ tem-se $\sigma_{g'gg'^{-1}} = \sigma_{g'} \sigma_g \sigma_{g'^{-1}} = \sigma_{g'} e \sigma_{g'^{-1}} = e$ o que significa que $g'g g'^{-1} \in Ker[\sigma]$.

PARTE III

REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS

CAPÍTULO 3

TEORIA DE REPRESENTAÇÕES

Contents

3.1 Representações de Grupos	69
Soma directa de Representações de um grupo	71
Produto directo de Representações	71
Equivalência, Unitaridade, Redutibilidade	73
3.2 Representações Redutíveis de Grupos	76
Representação Completamente Redutível	76
Teorema de Maschke	77
3.3 Representações Irredutíveis de Grupos	79
1º Lema de Schur	79
2º Lema de Schur	80
Grupos Abelianos	80

3.1 Representações de Grupos

Dados dois espaços com estruturas algébricas, um **HOMOMORFISMO** é uma aplicação de um espaço no outro de forma a preservar as respectivas estruturas, ou seja a imagem dum produto de elementos do primeiro espaço será o produto das imagens desses componentes no segundo espaço. Se esta aplicação for bi-unívoca então designa-se um **ISOMORFISMO**.

Quando o primeiro espaço (e respectiva estrutura) é abstracto e formal mas o segundo pode ser construído e descrito concretamente de forma analítica, qualquer homomorfismo do primeiro para o segundo designa-se uma **REALIZAÇÃO**. Se o segundo espaço em questão for um espaço de matrizes, então o homomorfismo descrito designa-se uma **REPRESENTAÇÃO** da primeira estrutura.

Assim, a teoria de **REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS** estuda os homomorfismos

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : G &\longrightarrow \text{AUT}(V) & : V &\rightarrow V \\ g &\mapsto \mathbf{R}_g & : \vec{v} &\rightarrow \mathbf{R}_g \vec{v} \\ g \tilde{g} &\mapsto \mathbf{R}_{g\tilde{g}} = \mathbf{R}_g \mathbf{R}_{\tilde{g}} & : \vec{v} &\rightarrow \mathbf{R}_g (\mathbf{R}_{\tilde{g}} \vec{v}) \end{aligned}$$

entre grupos arbitrários G e o grupo $\text{AUT}(V)$ de **OPERADORES LINEARES INVERTÍVEIS** num espaço vectorial V , que pode ter dimensão finita ou infinita. Óbviamente, se $\vec{u} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 \in V$ para escalares arbitrários α, β , o automorfismo $\mathbf{R}_g \in \text{AUT}(V)$ verifica

$$\mathbf{R}_g \vec{u} = \alpha (\mathbf{R}_g \vec{v}_1) + \beta (\mathbf{R}_g \vec{v}_2)$$

Neste sentido se diz que \mathbf{R} é uma **REALIZAÇÃO LINEAR** ou **REPRESENTAÇÃO** de G num grupo de transformações lineares. No caso de V ser um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo \mathbb{K} , este grupo de transformações lineares é $\text{AUT}(V) = \text{GL}_n(\mathbb{K})$ que pode ser visto como o conjunto de matrizes $n \times n$ com entradas em \mathbb{K} . Muito frequentemente $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

- A dimensão do espaço vectorial V é a **DIMENSÃO DA REPRESENTAÇÃO**.
- Um dado grupo pode ter representações de dimensão **FINITA** e **INFINITA**.

EXEMPLOS

- i. Todos os grupos possuem uma **REPRESENTAÇÃO TRIVIAL** que faz corresponder a qualquer elemento $g \in G$ o mesmo operador identidade $\mathbf{R}_g \equiv \mathbf{R}_e = \mathbf{1}$.
- ii. Os grupos definidos por constrangimentos sobre o conjunto de matrizes quadradas \mathbb{A} de ordem n sobre um corpo \mathbb{K} (ele próprio um grupo designado $\text{GL}(n, \mathbb{K})$) estão naturalmente associados a uma representação em automorfismos de $V = \mathbb{K}^n$, na qual $\mathbf{R}_{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{A}$. São exemplos:

$U(n)$ – o conjunto de matrizes complexas **UNITÁRIAS**, i.e. $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}^{-1}$.
(\dagger =Transposta+Conjugada)

$SU(n)$ – o conjunto de matrizes complexas **UNITÁRIAS ESPECIAIS**, i.e. matrizes unitárias de determinante $\text{DET}(\mathbb{A}) = |\mathbb{A}| = 1$.

$O(n)$ – o conjunto de matrizes **ORTOGONAIS**, i.e. matrizes que verificam $\mathbb{A}^\top = \mathbb{A}^{-1}$.

$SO(n)$ – o conjunto de matrizes **ORTOGONAIS ESPECIAIS**, i.e. matrizes ortogonais de determinante $\text{DET}(\mathbb{A}) = |\mathbb{A}| = 1$.

$Sp(n)$ – o conjunto de matrizes **SIMPLÉTICAS**, i.e. matrizes que verificam a condição $\mathbb{A}^\top \mathbb{J} \mathbb{A} = \mathbb{J}$, onde $\mathbb{J}^2 = -\mathbf{1}$.

- iii. Para o **GRUPO CÍCLICO** de ordem n , $\mathbb{Z}_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ com $a^n = e$, qualquer representação deve verificar $\mathbf{R}_{a^n} = \mathbf{R}_a^n = \mathbf{1}$. Para $p = 0, 1, 2, \dots, n-1$, os números complexos distintos

$$\lambda_p = e^{2\pi i \frac{p}{n}} \in \mathbb{C} \quad \text{verificam} \quad \lambda_p^n = 1.$$

Podemos assim associar a cada p uma representação unidimensional inequivalente

$$(1\text{-dim.}) - \mathbf{R}_a^{(p)} = \lambda_p, \quad \mathbf{R}_{a^m}^{(p)} = \lambda_p^m, \quad \text{para qualquer } a \in T^1.$$

- iv. O **GRUPO DIEDRAL** \mathcal{D}_n gerado pelos produtos de dois elementos a, b e as relações definidoras $a^2 = 1$, $b^n = 1$, $bab = a$ tem representações de dimensão:

$$(1\text{-dim.}) - \mathbf{R}_a = \pm 1, \quad \mathbf{R}_b = 1 \quad (\text{se } n = \text{ímpar}).$$

$$(1\text{-dim.}) - \mathbf{R}_a = \pm 1, \quad \mathbf{R}_b = \pm 1 \quad (\text{se } n = \text{par}).$$

$$(2\text{-dim.}) - \mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{com } \lambda = e^{2\pi i \frac{1}{n}}.$$

v. O **GRUPO DAS TRANSLAÇÕES** da recta real $\mathbb{T}_1 \simeq (\mathbb{R}, +, 0)$ ($x \rightarrow x+a$ para $a \in \mathbb{T}_1$, $x \in \mathbb{R}$) tem um número infinito de representações unidimensionais inequivalentes parametrizadas por um escalar κ , a saber:

$$(1\text{-dim.}) - \mathbf{R}_a^{(\kappa)} = e^{\kappa a} \text{ para qualquer } a \in \mathbb{T}_1.$$

Podemos também definir representações bidimensionais parametrizadas por pares κ_1, κ_2 :

$$(2\text{-dim.}) - \mathbf{R}_a^{(\kappa_1, \kappa_2)} = \begin{bmatrix} e^{\kappa_1 a} & 0 \\ 0 & e^{\kappa_2 a} \end{bmatrix} \text{ para qualquer } a \in \mathbb{T}_1.$$

Adicionalmente existe uma representação bi-dimensional inequivalente a qualquer uma destas, que se escreve:

$$(2\text{-dim.}) - \mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ para qualquer } a \in \mathbb{T}_1.$$

I – SOMA DIRECTA DE REPRESENTAÇÕES DE UM GRUPO

Conhecidas duas representações $\mathbf{R}^{(1)}$ e $\mathbf{R}^{(2)}$ de um grupo G em espaços vectoriais V_1 e V_2 é possível construir uma representação no espaço $V_1 \oplus V_2$, soma directa de espaços vectoriais, usando a correspondência

$$(\mathbf{R}^{(1)} \oplus \mathbf{R}^{(2)})_g \{ \hat{v}_1, \hat{v}_2 \} = \{ \mathbf{R}_g^{(1)} \hat{v}_1, \mathbf{R}_g^{(2)} \hat{v}_2 \}$$

Em termos matriciais isto corresponde a uma matriz bloco-diagonal

$$(\mathbf{R}^{(1)} \oplus \mathbf{R}^{(2)})_g = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_g^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_g^{(2)} \end{bmatrix}$$

II – PRODUTO DIRECTO DE REPRESENTAÇÕES

O **PRODUTO DIRECTO** de representações de grupos é uma representação do produto directo $G_1 \times G_2$ dos respectivos grupos: se V_1 e V_2 são os espaços vectoriais que suportam cada representação \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 , respectivamente de grupos G_1 e G_2 , então o produto directo $\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2$ é uma representação do grupo $G_1 \times G_2$ actuando no espaço vectorial $V_1 \otimes V_2$ através de

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 : G_1 \times G_2 &\rightarrow \text{AUT}(V_1 \otimes V_2) \\ (g_1, g_2) &\mapsto (\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2)(g_1, g_2) : (\hat{v}_1 \otimes \hat{v}_2) \rightarrow (\mathbf{R}_1(g_1) \hat{v}_1) \otimes (\mathbf{R}_2(g_2) \hat{v}_2) \end{aligned}$$

Por exemplo, se \mathbf{R} é uma representação de dimensão 2 de um grupo G num espaço vectorial V , então numa base $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ de V a representação \mathbf{R} identifica-se com as matrizes 2×2 cujas entradas $u_{ij} \in \mathcal{F}_K(V)$ são funções escalares em G

$$\mathbf{R}_g \equiv \begin{bmatrix} u_{11}(g) & u_{12}(g) \\ u_{21}(g) & u_{22}(g) \end{bmatrix}$$

de maneira que, para qualquer $\tilde{v} = v^1 \tilde{e}_1 + v^2 \tilde{e}_2 \in V$, se tem

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_g \tilde{v} &= v^1 \mathbf{R}_g \tilde{e}_1 + v^2 \mathbf{R}_g \tilde{e}_2 = v^1 (u_{11}(g) \tilde{e}_1 + u_{21}(g) \tilde{e}_2) + v^2 (u_{12}(g) \tilde{e}_1 + u_{22}(g) \tilde{e}_2) \\ &= (u_{11}(g) v^1 + u_{12}(g) v^2) \tilde{e}_1 + (u_{21}(g) v^1 + u_{22}(g) v^2) \tilde{e}_2 \end{aligned}$$

ou seja

$$\mathbf{R}_g \tilde{v} \equiv \begin{bmatrix} u_{11}(g) & u_{12}(g) \\ u_{21}(g) & u_{22}(g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}(g) v^1 + u_{12}(g) v^2 \\ u_{21}(g) v^1 + u_{22}(g) v^2 \end{bmatrix}$$

O produto directo de duas cópias de \mathbf{R} é uma representação de $G \times G$ em $V \otimes V$. Uma base deste espaço vectorial pode ser por exemplo constituída pelos monómios $\{\tilde{e}_1 \otimes \tilde{e}_1, \tilde{e}_1 \otimes \tilde{e}_2, \tilde{e}_2 \otimes \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \otimes \tilde{e}_2\}$. Um elemento genérico de $V \otimes V$ pode então ser escrito nesta base como (o sobrescrito (2) apenas indica tratar-se de um tensor de ordem 2)

$$\tilde{v}^{(2)} = v^{11} \tilde{e}_1 \otimes \tilde{e}_1 + v^{12} \tilde{e}_1 \otimes \tilde{e}_2 + v^{21} \tilde{e}_2 \otimes \tilde{e}_1 + v^{22} \tilde{e}_2 \otimes \tilde{e}_2$$

e então a representação $\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$ tem dimensão 4 e escreve-se nesta base

$$\begin{aligned} (\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})_{(g, \tilde{g})} \tilde{v}^{(2)} &= v^{11} (\mathbf{R}_g \tilde{e}_1) \otimes (\mathbf{R}_{\tilde{g}} \tilde{e}_1) + v^{12} (\mathbf{R}_g \tilde{e}_1) \otimes (\mathbf{R}_{\tilde{g}} \tilde{e}_2) + v^{21} (\mathbf{R}_g \tilde{e}_2) \otimes (\mathbf{R}_{\tilde{g}} \tilde{e}_1) + v^{22} (\mathbf{R}_g \tilde{e}_2) \otimes (\mathbf{R}_{\tilde{g}} \tilde{e}_2) \\ &= (v^{11} u_{11}(g) u_{11}(\tilde{g}) + v^{12} u_{11}(g) u_{12}(\tilde{g}) + v^{21} u_{12}(g) u_{11}(\tilde{g}) + v^{22} u_{12}(g) u_{12}(\tilde{g})) \tilde{e}_1 \otimes \tilde{e}_1 \\ &\quad + (v^{11} u_{11}(g) u_{21}(\tilde{g}) + v^{12} u_{11}(g) u_{22}(\tilde{g}) + v^{21} u_{12}(g) u_{21}(\tilde{g}) + v^{22} u_{12}(g) u_{22}(\tilde{g})) \tilde{e}_1 \otimes \tilde{e}_2 \\ &\quad + (v^{11} u_{21}(g) u_{11}(\tilde{g}) + v^{12} u_{21}(g) u_{12}(\tilde{g}) + v^{21} u_{22}(g) u_{11}(\tilde{g}) + v^{22} u_{22}(g) u_{12}(\tilde{g})) \tilde{e}_2 \otimes \tilde{e}_1 \\ &\quad + (v^{11} u_{21}(g) u_{21}(\tilde{g}) + v^{12} u_{21}(g) u_{22}(\tilde{g}) + v^{21} u_{22}(g) u_{21}(\tilde{g}) + v^{22} u_{22}(g) u_{22}(\tilde{g})) \tilde{e}_2 \otimes \tilde{e}_2 \\ &= \begin{pmatrix} u_{11}(g) u_{11}(\tilde{g}) & u_{11}(g) u_{12}(\tilde{g}) & u_{12}(g) u_{11}(\tilde{g}) & u_{12}(g) u_{12}(\tilde{g}) \\ u_{11}(g) u_{21}(\tilde{g}) & u_{11}(g) u_{22}(\tilde{g}) & u_{12}(g) u_{21}(\tilde{g}) & u_{12}(g) u_{22}(\tilde{g}) \\ u_{21}(g) u_{11}(\tilde{g}) & u_{21}(g) u_{12}(\tilde{g}) & u_{22}(g) u_{11}(\tilde{g}) & u_{22}(g) u_{12}(\tilde{g}) \\ u_{21}(g) u_{21}(\tilde{g}) & u_{21}(g) u_{22}(\tilde{g}) & u_{22}(g) u_{21}(\tilde{g}) & u_{22}(g) u_{22}(\tilde{g}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^{11} \\ v^{12} \\ v^{21} \\ v^{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Formalmente, vemos que a matriz produto de representações inclui todos os possíveis produtos de elementos da representações individuais, e pode ser reconstruída substituindo cada entrada na primeira matriz pelo seu produto com a segunda matriz, por exemplo como

$$(\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})_{(g, \tilde{g})} = \begin{bmatrix} u_{11}(g) \begin{bmatrix} u_{11}(\tilde{g}) & u_{12}(\tilde{g}) \\ u_{21}(\tilde{g}) & u_{22}(\tilde{g}) \end{bmatrix} & u_{12}(g) \begin{bmatrix} u_{11}(\tilde{g}) & u_{12}(\tilde{g}) \\ u_{21}(\tilde{g}) & u_{22}(\tilde{g}) \end{bmatrix} \\ u_{21}(g) \begin{bmatrix} u_{11}(\tilde{g}) & u_{12}(\tilde{g}) \\ u_{21}(\tilde{g}) & u_{22}(\tilde{g}) \end{bmatrix} & u_{22}(g) \begin{bmatrix} u_{11}(\tilde{g}) & u_{12}(\tilde{g}) \\ u_{21}(\tilde{g}) & u_{22}(\tilde{g}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

III – EQUIVALÊNCIA, UNITARIDADE, REDUTIBILIDADE

DEFINIÇÃO [3.1]

- i. Para G um grupo qualquer, duas representações $\mathbf{R}^{(i)} : G \rightarrow \text{AUT}(V_i)$, $i = (1, 2)$, dizem-se **EQUIVALENTES** se existir uma aplicação linear **INVERTÍVEL** $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ entre os espaços vectoriais V_1 e V_2 , suportes das representações $\mathbf{R}^{(i)}$ respectivas, tal que

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{A}$$

- ii. Uma representação $\mathbf{U} : G \rightarrow \text{AUT}(V)$ de G diz-se **UNITÁRIA** se se tiver

$$\mathbf{U}_g^\dagger \mathbf{U}_g = \mathbf{U}_g \mathbf{U}_g^\dagger = \mathbf{1} \quad \forall g \in G$$

- iii. Uma representação $\mathbf{R} : G \rightarrow \text{AUT}(V)$ de G diz-se **REDUTÍVEL** se existe em V algum sub-espaço **NÃO-TRIVIAL**, **INVARIANTE** relativamente a todas as transformações $\mathbf{U}_g \in \text{AUT}(V)$, $\forall g \in G$.

Uma vez que as representações se dividem em **CLASSES DE EQUIVALÊNCIA** através da relação

$$\mathbf{R}^{(1)} \approx \mathbf{R}^{(2)} \Leftrightarrow (\exists \mathbf{A} \in \mathcal{L}(V_1, V_2) : \mathbf{R}_g^{(1)} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_g^{(2)} \mathbf{A}, \forall g \in G)$$

a determinação de representações fica reduzida à determinação de representações **INEQUIVALENTES**. Neste contexto iremos mostrar que:

- cada classe de equivalência de representações dum **GRUPO FINITO** G possui **REPRESENTAÇÕES UNITÁRIAS**.
- Para um grupo finito G , o número de classes de representações inequivalentes é igual ao número de **CLASSES DE CONJUGAÇÃO** de G .
- A soma do quadrado das dimensões das representações associadas às diferentes classes de conjugação de G é igual à ordem de G .
- A dimensão de cada representação irreduzível é um **DIVISOR** do índice de qualquer sub-grupo **ABELIANO NORMAL** de G e um divisor de $\sigma(G)$. Esta dimensão não excede o índice de sub-grupos abelianos de G .
- Todo o carácter de G é uma combinação linear dos caracteres de representações **INDUZIDAS** por sub-grupos cíclicos e combinação linear inteira de caracteres de representações induzidas de representações unidimensionais de sub-grupos.

EXERCÍCIO [3.1]

Dado um espaço vectorial V com um produto escalar (\cdot, \cdot) entre os seus vectores, defina um novo produto escalar através de

$$\langle v, \tilde{v} \rangle = \frac{1}{o[G]} \sum_{g \in G} (\mathbf{R}_g v, \mathbf{R}_g \tilde{v}) \quad ; \quad \forall v, \tilde{v} \in V$$

- i. Mostre que o produto escalar assim definido sobre qualquer espaço vectorial V suporte de uma representação \mathbf{R} de G é bilinear e não-negativo (i.e. ≥ 0).
- ii. Dada uma base e_1, e_2, \dots, e_d **ORTONORMAL** relativamente ao produto escalar (\cdot, \cdot) original de V , é possível definir uma nova base f_1, f_2, \dots, f_d ortonormal relativamente ao novo produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se \mathbf{A} representar o operador de correspondência $\mathbf{A} e_i = f_i$, mostre que então $\langle \mathbf{A} v, \mathbf{A} \tilde{v} \rangle = \langle v, \tilde{v} \rangle$.
- iii. Por outro lado, mostre que no novo produto escalar $\langle \mathbf{R}_{g'} v, \mathbf{R}_{g'} \tilde{v} \rangle \equiv \langle v, \tilde{v} \rangle$ e conclua que a representação $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{A}$ verifica a condição de unicidade requerida

$$(\tilde{\mathbf{R}}_{g'} v, \tilde{\mathbf{R}}_{g'} \tilde{v}) = \langle \mathbf{R}_{g'} \mathbf{A} v, \mathbf{R}_{g'} \mathbf{A} \tilde{v} \rangle \equiv \langle \mathbf{A} v, \mathbf{A} \tilde{v} \rangle = \langle v, \tilde{v} \rangle$$

Este resultado pode ser estendido a **GRUPOS COMPACTOS**, porque, como veremos adiante, aí existe uma **MEDIDA DE HAAR** $d\mu(g)$ tal que a medida do grupo inteiro $\mu(G) = \int_G d\mu(g) < \infty$, permitindo assim a redefinição do produto escalar para

$$\langle v, \tilde{v} \rangle = \frac{1}{\mu(G)} \int_G (\mathbf{R}_g v, \mathbf{R}_g \tilde{v}) d\mu(g)$$

TEOREMA [3.2]

Se G for um grupo **FINITO** ou **INFINITO COMPACTO**, qualquer representação de **DIMENSÃO FINITA** é equivalente a uma representação **UNITÁRIA**.

Se G for um grupo **INFINITO NÃO-COMPACTO** podem existir representações de dimensão finita que não são equivalentes a unitárias, e as representações **UNITÁRIAS** ou são de dimensão infinita, ou são de dimensão finita na forma de **SOMAS DIRECTAS** de representações unidimensionais.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $\mathbf{R} : G \rightarrow \text{AUT}(V)$ uma representação de G , **NÃO NECESSÁRIAMENTE** unitária. Vamos mostrar que existe uma aplicação linear invertível $\mathbf{S} \in \mathcal{L}(V, V)$ tal que

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{S} \mathbf{R}_g \mathbf{S}^{-1}$$

é **UNITÁRIA** para todo o $g \in G$, i.e. $\mathbf{U}_g^\dagger \mathbf{U}_g = \mathbf{1}$, $\forall g \in G$

Faremos a demonstração para G finito: a generalização para o caso compacto apenas substitui o somatório discreto pelo integral com medida de Haar no grupo. Construa-se o operador

$$\mathbf{T} = \sum_{g \in G} \mathbf{R}_g^\dagger \mathbf{R}_g \quad \left(\text{ou } \mathbf{T} = \int_G \mathbf{R}_g^\dagger \mathbf{R}_g d\mu(g), \text{ onde } d\mu(g) = \sum_{g' \in G} \delta(g - g') dg \right)$$

\mathbf{T} é evidentemente **HERMÍTICA**, i.e. $\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T}$. Que \mathbf{T} é também estritamente positiva resulta de:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{T}\mathbf{v}) = \sum_{g \in G} (\mathbf{v}, \mathbf{R}_g^\dagger \mathbf{R}_g \mathbf{v}) = \sum_{g \in G} (\mathbf{R}_g \mathbf{v}, \mathbf{R}_g \mathbf{v}) \geq 0$$

e se $\mathbf{v} \neq 0$ então $(\mathbf{v}, \mathbf{T}\mathbf{v}) > 0$ porque

$$(\mathbf{v}, \mathbf{T}\mathbf{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{g \in G} \|\mathbf{R}_g \mathbf{v}\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_g \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\forall g \in G) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Isto significa que \mathbf{T} tem uma **DECOMPOSIÇÃO POLAR** num produto da forma $\mathbf{T} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}$ com

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \mathbf{A}$$

($\lambda_i > 0$), onde \mathbf{A} é uma matriz unitária que diagonaliza \mathbf{T}

$$\mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dado que, pela definição

$$\mathbf{R}_h^\dagger \mathbf{T} \mathbf{R}_h = \sum_{g \in G} \mathbf{R}_{gh}^\dagger \mathbf{R}_{gh} = \mathbf{T}$$

tem-se também

$$\mathbf{R}_h^\dagger \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{R}_h = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{S} \mathbf{R}_h \mathbf{S}^{-1})^\dagger (\mathbf{S} \mathbf{R}_h \mathbf{S}^{-1}) = \mathbf{1}$$

pelo que a representação unitária equivalente requerida é

$$\mathbf{U}_g = \mathbf{S} \mathbf{R}_g \mathbf{S}^{-1}$$

A situação é menos favorável para grupos **NÃO-COMPACTOS**. Assim, por exemplo, para grupos G não-compactos **SIMPLES** (i.e. não possuindo nenhum sub-grupo PRÓPRIO, CONEXO E INVARIANTE) pode-se mostrar que **NÃO EXISTEM** representações **UNITÁRIAS** de **DIMENSÃO FINITA** além da trivial (identidade). Nesta categoria encontram-se grupos de simetria importantes da física, como o grupo de **LORENTZ** $O(3, 1)$ (i.e. o grupo de transformações lineares que deixa invariante o produto escalar no espaço de Minkowski, \mathbb{R}^4 com uma métrica diagonal de assinatura $(-, +, +, +)$), ou de **DE SITTER**, $SO(4, 1)$.

Se G for não-compacto sem ser simples, então as representações unitárias de G ou são de dimensão infinita, ou finita mas infiel (i.e. diferentes elementos de G têm a mesma matriz como representação).

Mais grave é que neste caso G pode possuir representações de dimensão finita que não são equivalentes a nenhuma representação unitária: por exemplo, o grupo multiplicativo \mathbb{R}_+ dos reais positivos tem representações **UNIDIMENSIONAIS** $U^{(\beta)}(x) = \beta \log(x)$, parametrizadas por $\beta > 0$, que não se podem transformar por semelhança em representações unitárias. O grupo Euclideo, produto semi-directo $O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$ é outro exemplo: nenhuma representação de dimensão finita na qual as translações sejam representadas não-trivialmente é equivalente a uma representação unitária.

3.2 Representações Redutíveis de Grupos

Uma representação $R : G \rightarrow \text{AUT}(V)$ de G em V é dita **REDUTÍVEL** se existe em V algum sub-espço **INVARIANTE** relativamente a todas as operações $U_g, \forall g \in G$.

I – REPRESENTAÇÃO COMPLETAMENTE REDUTÍVEL

DEFINIÇÃO [3.3]

Uma representação R de G é **COMPLETAMENTE REDUTÍVEL** se se puder escrever na forma

$$R_g = \begin{pmatrix} A_g & 0 \\ 0 & B_g \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G$$

onde A_g, B_g são matrizes quadradas irredutíveis ou igualmente completamente redutíveis.

- A seguinte representação bi-dimensional do grupo $T_1 = (\mathbb{R}, +, 0)$ de translações da recta real não é completamente redutível.

$$U_a^{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que T_1 é um grupo infinito, localmente compacto mas não compacto. Se existisse uma matriz S tal que $S U_a^{T_1} S^{-1} = \begin{bmatrix} f_1(a) & 0 \\ 0 & f_2(a) \end{bmatrix}$ então f_1 e f_2 seriam representações unidimensionais de T_1 , e como tais irredutíveis. Vimos já que estas são da forma $R_a^{(k)} = e^{ka}$ para um escalar k . Contudo, o traço das duas representações deve ser invariante, e neste caso mesmo constante para todo o $a \in \mathbb{T}_1$.

$$\text{TR}(U_a^{T_1}) = 2 = \text{TR}(S U_a^{T_1} S^{-1}) = e^{k_1 a} + e^{k_2 a}$$

A única solução consiste em ter $k_1 = k_2 = 0$, ou seja U^{T_1} deveria ser equivalente à representação trivial a duas dimensões, o que obviamente não é, donde S não pode existir.

Para grupos finitos ou compactos, tem-se o seguinte resultado positivo.

II – TEOREMA DE MASCHKE

TEOREMA [3.4]

Qualquer representação de dimensão finita de um grupo G FINITO ou COMPACTO é COMPLETAMENTE REDUTÍVEL.

DEMONSTRAÇÃO

Uma representação redutível pode ser sempre transformada numa equivalente da forma $\mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{N}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \end{pmatrix}$ bastando para isso reordenar os seus vectores de base de forma que os últimos m sejam todos elementos do subespaço de V deixado invariante pela representação \mathbf{R} . Por outro lado, de

$$\mathbf{R}_{g'g} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{g'g} & \mathbf{N}_{g'g} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{g'g} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{g'} \mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{g'} \mathbf{A}_g & \mathbf{A}_{g'} \mathbf{N}_g + \mathbf{N}_{g'} \mathbf{B}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{g'} \mathbf{B}_g \end{pmatrix}$$

podemos ver que $\mathbf{N}_{g'g} = \mathbf{A}_{g'} \mathbf{N}_g + \mathbf{N}_{g'} \mathbf{B}_g$. Fazendo $g' = g^{-1}$ devemos obter $\mathbf{A}_{g^{-1}} = \mathbf{A}_g^{-1}$, $\mathbf{B}_{g^{-1}} = \mathbf{B}_g^{-1}$ e $\mathbf{A}_{g^{-1}} \mathbf{N}_g + \mathbf{N}_{g^{-1}} \mathbf{B}_g = \mathbf{0}$ donde $\mathbf{N}_{g^{-1}} = -\mathbf{A}_g^{-1} \mathbf{N}_g \mathbf{B}_g^{-1}$. Assim \mathbf{R}_g tem inversa

$$\mathbf{R}_g^{-1} = \mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g^{-1} & -\mathbf{A}_g^{-1} \mathbf{N}_g \mathbf{B}_g^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^{-1} \end{pmatrix}$$

As matrizes \mathbf{A}_g , \mathbf{B}_g verificam as condições $\mathbf{A}_{g'g} = \mathbf{A}_{g'} \mathbf{A}_g$ e $\mathbf{B}_{g'g} = \mathbf{B}_{g'} \mathbf{B}_g$ necessárias para que $\tilde{\mathbf{R}}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \end{pmatrix}$ seja ainda uma representação de G . Procuramos assim uma matriz \mathbf{S} invertível que verifique a condição de equivalência $\mathbf{R}_g = \mathbf{S} \tilde{\mathbf{R}}_g \mathbf{S}^{-1}$ ou, o que é o mesmo, $\mathbf{R}_g \mathbf{S} \tilde{\mathbf{R}}_g^{-1} = \mathbf{S}$. A matriz

$$\mathbf{S} = \sum_{g \in G} \mathbf{R}_g \tilde{\mathbf{R}}_g^{-1}$$

verifica facilmente essa identidade:

$$\mathbf{R}_{g'} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \sum_{g \in G} \mathbf{R}_{g'} \mathbf{R}_g \tilde{\mathbf{R}}_g^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \sum_{g' \in G} \mathbf{R}_{g'g} \tilde{\mathbf{R}}_{g'g}^{-1} = \mathbf{S}$$

porque a soma em $g'g$ também percorre todos os elementos de G apenas uma vez, mas por ordem diferente. De facto

$$\mathbf{S} = \sum_{g \in G} \mathbf{R}_g \tilde{\mathbf{R}}_g^{-1} = \sum_{g \in G} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g & \mathbf{N}_g \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g^{-1} \end{pmatrix} = \sum_{g \in G} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_g \mathbf{A}_g^{-1} & \mathbf{N}_g \mathbf{B}_g^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_g \mathbf{B}_g^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \mathbf{I}_n & \sum_{g \in G} \mathbf{N}_g \mathbf{B}_g^{-1} \\ \mathbf{0} & \Omega \mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{g'} \cdot \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \sum_{g \in G} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & (\mathbf{N}_{g'} \mathbf{B}_g + \mathbf{A}_{g'} \mathbf{N}_g) \mathbf{B}_g^{-1} \mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \mathbf{I}_n & \sum_{g \in G} \mathbf{N}_{g'} \mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \Omega \mathbf{I}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega \mathbf{I}_n & \sum_{g \in G} \mathbf{N}_g \mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \Omega \mathbf{I}_m \end{pmatrix} = \mathbf{S}$$

sendo

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega^{-1} \mathbf{I}_n & -\Omega^{-2} \sum_{g \in G} \mathbf{N}_g \mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \Omega^{-1} \mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

A demonstração para grupos compactos corre da mesma forma apenas com a substituição de \mathbf{S} por

$$\mathbf{S} = \int_G d\mathbf{R}_{g'} \mathbf{R}_{g'} \tilde{\mathbf{R}}_{g'}^{-1} = \begin{pmatrix} \Omega \mathbf{I}_n & \int_G d\mathbf{R}_{g'} \mathbf{N}_{g'} \mathbf{B}_g^{-1} \\ 0 & \Omega \mathbf{I}_m \end{pmatrix}$$

onde $\Omega = \int_G d\mathbf{R}_g$ é o "volume" (número de elementos) de G . É agora fácil de mostrar que

$$\mathbf{R}_g \mathbf{S} \tilde{\mathbf{R}}_g^{-1} = \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_g \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{R}}_g$$

já que $d\mathbf{R}_{g'} = d\mathbf{R}_{gg'}$ é uma medida invariante (medida de Haar invariante à esquerda, que existe sempre em qualquer grupo localmente compacto). Vemos igualmente porque é que o resultado falha quando o grupo não tem um "volume" finito Ω . ■

3.3 Representações Irredutíveis de Grupos

I – 1º LEMA DE SCHUR

LEMA [3.5]

Sejam $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ representações **IRREDUTÍVEIS**, de dimensões d_1 e d_2 , dum grupo G .

Se existir uma $d_2 \times d_1$ -matriz A tal que

$$A U_g^{(1)} = U_g^{(2)} A \quad \forall g \in G$$

então uma das seguintes condições se verifica :

- i. $A = 0$
- ii. $d_1 = d_2$ e $\det(A) \neq 0$

DEMONSTRAÇÃO

Por definição de irredutibilidade, os espaços vectoriais $V_{(1)}$ e $V_{(2)}$ não possuem sub-espacos próprios invariantes para as representações lineares $U^{(k)} : G \rightarrow \text{Aut}(V_{(k)})$ ($k = 1, 2$) de G .

Escolham-se bases $\{e_1, e_2, \dots, e_{d_1}\}$ de $V_{(1)}$ e $\{f_1, f_2, \dots, f_{d_2}\}$ de $V_{(2)}$. Uma aplicação linear $A \in \mathcal{L}(V_{(1)}, V_{(2)})$ faz corresponder aos d_1 vectores da base de $V_{(1)}$ outros tantos vectores $(x_1, x_2, \dots, x_{d_1})$ de $V_{(2)}$ (que podem não ser mutuamente independentes) através da correspondência $x_i = A e_i$.

Se A verifica a condição do Lema, vamos mostrar que o sub-espaco $S \subset V_{(2)}$, gerado pela A -imagem de $V_{(1)}$, tem de ser invariante para a representação $U^{(2)}$ de G . De facto, se $x \in S$, então

$$x = x^i x_i = x^i A e_i = A (x^i e_i) = A v$$

para algum $v \in V_{(1)}$. Daí que, em S

$$U^{(2)} x = U^{(2)} A v = A U^{(1)} v = A v' = x' \in S$$

Mas se a representação $U^{(2)}$ é **IRREDUTÍVEL**, os únicos sub-espacos invariantes de $V_{(2)}$ são $S = \{0\}$ ou $S = V_{(2)}$. As alternativas são pois:

- $S = \{0\}$, o que só pode ser se $A = 0$.
- $S = V_{(2)}$, e os vectores $x_i = A e_i$, $i = (1, 2, \dots, d_1)$, são linearmente independentes, o que implica necessariamente que $d_1 = d_2$ e $\det(A) \neq 0$.

- $S = V_{(2)}$, e os vectores $\mathbf{x}_i = \mathbf{A} \mathbf{e}_i$, $i = (1, 2, \dots, d_1)$, não são linearmente independentes, o que só aconteceria se $d_1 > d_2$. Mas nesse caso, a condição do Lema é também verificada para a $d_1 \times d_2$ -matriz $\mathbf{A}^T \in \mathcal{L}(V_{(2)}, V_{(1)})$, i.e. para $\forall g \in G$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{U}_g^{(2)} = \mathbf{A}^T (\mathbf{U}_{g^{-1}}^{(2)})^T = (\mathbf{U}_{g^{-1}}^{(2)} \mathbf{A})^T = (\mathbf{A} \mathbf{U}_{g^{-1}}^{(1)})^T = \mathbf{U}_g^{(1)} \mathbf{A}^T$$

O mesmo raciocínio que fizemos para \mathbf{A} mostra que só se pode ter $\mathbf{A}^T = 0$, já que se assumiu $d_2 < d_1$ e portanto os vectores $\mathbf{v}_j = \mathbf{A}^T \mathbf{f}_j$ não podem gerar $V_{(1)}$. Mas $\mathbf{A}^T = 0$ implica $\mathbf{A} = 0$ e consequentemente $S = \{0\}$, uma contradição !

Portanto apenas as duas primeiras alíneas se verificam na prática, o que conclui o Lema I. ■

II – 2º LEMA DE SCHUR

LEMA [3.6]

Seja \mathbf{U} uma representação **IRREDUTÍVEL**, de dimensão d , dum grupo G . Se existir uma $d \times d$ -matriz \mathbf{A} que verifique

$$\mathbf{U}_g \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{U}_g \quad \forall g \in G$$

então $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}_d$, onde \mathbf{I}_d é a $d \times d$ -matriz identidade e $\lambda \in \mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO

Definindo $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_d$, então \mathbf{B} encontra-se nas condições do **LEMA I**. Se escolhermos λ tal que $\text{DET}(\mathbf{B}) = 0$ então $\mathbf{B} = 0$. Verifica-se portanto que existe um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}_d$. Note que é crucial admitirmos aqui que a representação \mathbf{U} é **COMPLEXA**, porque a equação secular $\text{DET}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_d) = 0$ pode não ter solução se apenas admitirmos λ real. ■

Como consequência imediata do **2º LEMA DE SCHUR** temos o seguinte corolário válido para grupos abelianos.

III – GRUPOS ABELIANOS

COROLÁRIO

Toda a representação irredutível de um grupo **ABELIANO** é unidimensional.

CAPÍTULO 4

REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS FINITOS E COMPACTOS

Contents

4.1 Caracteres de Grupos Abelianos	82
Caracter Linear dum Grupo	83
Operadores de Projecção	84
4.2 Caracteres de Grupos Não-Abelianos	85
Caracter duma Representação dum Grupo	85
4.3 Relações de Ortogonalidade	86
Ortogonalidade de Funções sobre G	87
1ª Relação de Ortogonalidade	88
4.4 Representação Regular	88
Decomposição da Representação Regular	89
Teorema de Burnside	90
4.5 Relações de Ortogonalidade - 2ª Parte	91
Sistema Ortogonal Completo de Funções em G	91
2ª Relação de Ortogonalidade	92
4.6 Representações Irreduzíveis	94
Classes e Representações Irreduzíveis	94
Representações Irreduzíveis de \mathcal{D}_4	96
Representações da Álgebra Quaterniónica	99
Representações Irreduzíveis de \mathcal{S}_3	101
Representações Irreduzíveis associadas a tabelas de Young	103
Teorema de Neuman-Peter-Weyl	105
4.7 Extensão de Representações	108
Levantamento de Representações	108
Representações Induzidas por sub-grupos	108
4.8 Exercícios	111
Álgebra de Clifford-Dirac	111
Grupo Simétrico Alternante A_4	114
4.9 Problemas da Parte III	115

4.1 Caracteres de Grupos Abelianos

Neste capítulo introduzimos o conceito de caracter χ de (uma representação de) um grupo. Estes são funções escalares com valores complexos definidas sobre o grupo e caracterizando de certa forma as representações do grupo e a sua decomposição em representações irredutíveis. A importância dos caracteres contudo excede apenas o interesse classificativo. Um certo tipo de caracteres, denominados **CARACTERES LINEARES**, são de facto representações unitárias unidimensionais do grupo. Em particular, para os grupos **ABELIANOS** todos os caracteres são lineares. Acontece que existem várias maneiras de induzir ou estender estas representações unidimensionais de sub-grupos mais simples a verdadeiras representações unitárias do grupo completo em que o sub-grupo se insere. Em certos casos pode-se mesmo mostrar que todas as representações irredutíveis do grupo se obtêm desta maneira a partir de caracteres lineares de certos sub-grupos. Torna-se assim importante conhecer a teoria de caracteres de grupos.

No caso de grupos abelianos iremos mostrar os seguintes factos acerca dos seus caracteres:

1. Os caracteres dos **GRUPOS ABELIANOS** são lineares, ou seja $\chi(e) = 1$, $\chi(g) \neq 0$ e

$$\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$$

2. Os caracteres de um grupo abeliano G formam uma base ortogonal do espaço $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(G)$ de funções complexas em G .
3. Os caracteres de um grupo abeliano **FINITO** têm módulo unidade $|\chi(g)| = 1$ pelo que

$$\chi(g^{-1}) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$$

4. Nos grupos G **CÍCLICOS** de ordem n , i.e. gerado pelas potências até à ordem n de um único elemento a , com $a^n = e$, o conjunto de todos os caracteres de G (denominado o seu dual \hat{G}) é isomorfo ao próprio grupo, $\hat{G} \simeq G$.
5. Dada uma qualquer representação $\mathbf{R} : G \rightarrow \text{AUT}(V)$ dum grupo abeliano (finito ou compacto), para cada caracter $\chi \in \hat{G}$ existe um **OPERADOR DE PROJECCÃO** associado $\mathbb{P}_{\chi} : V \rightarrow V$

$$\mathbb{P}_{\chi} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} \mathbf{R}_g \quad \left(\text{ou} \quad \mathbb{P}_{\chi} = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \overline{\chi(g)} \mathbf{R}_g d\mu(g) \right)$$

com as seguintes propriedades:

- (a) Os operadores assim definidos são projecções: $\mathbb{P}_{\chi}^2 = \mathbb{P}_{\chi}$.
- (b) Os sub-espacos projectados por diferentes \mathbb{P}_{χ} são disjuntos: $\mathbb{P}_{\chi^{(1)}}\mathbb{P}_{\chi^{(2)}} = 0 = \mathbb{P}_{\chi^{(2)}}\mathbb{P}_{\chi^{(1)}}$
- (c) O conjunto dos \mathbb{P}_{χ} formam uma partição da identidade: $\sum_{\chi \in \hat{G}} \mathbb{P}_{\chi} = \mathbf{1}$.
- (d) Para todo o $g \in G$ e $\chi \in \hat{G}$ verifica-se que $\mathbf{R}_g \mathbb{P}_{\chi} = \chi(g) \mathbb{P}_{\chi}$.

Este resultado significa a existência de **DECOMPOSIÇÃO CENTRAL EM PRIMÁRIOS DISJUNTOS DA REPRESENTAÇÃO R**: os sub-espços $V_\chi = \mathbb{P}_\chi V$ são invariantes para R e $V = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} V_\chi$.

I – CARACTER LINEAR DUM GRUPO

DEFINIÇÃO [4.1]

Dado G um grupo qualquer e $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ o conjunto de números complexos **NÃO-NULOS**, qualquer função $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}_*$ que verifique

$$\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$$

para todos os $g, g' \in G$ designa-se um **CARACTER LINEAR** do grupo G .

[UNIDIMENSIONAL]– Um caracter linear é uma **REPRESENTAÇÃO UNIDIMENSIONAL** do grupo. Conversamente, os caracteres de **REPRESENTAÇÕES UNIDIMENSIONAIS** de grupos, e em particular **TODOS OS CARACTERES DE GRUPOS ABELIANOS** são lineares.

[FINITO]– Quando G é **FINITO**, para algum n e qualquer $g \in G$ tem-se $g^n = e$, pelo que os caracteres lineares devem verificar

$$\chi(g^n) = \chi(g)^n = 1 \quad \Rightarrow \quad |\chi(g)| = 1 \quad \Rightarrow \quad \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$$

[ABELIANO]– Quando $G = \langle a \rangle$ é **CÍCLICO** de ordem m , os caracteres possíveis são determinados pelo valor escolhido para $\chi(a) = \sqrt[m]{1} = e^{2\pi i \frac{k}{m}}$, ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$), e o grupo multiplicativo de todos os caracteres de G , i.e. o grupo **DUAL** \hat{G} , é o grupo gerado por estas m raízes (complexas) de 1: \hat{G} é assim **ISOMORFO** a G .

[PRODUTO]– Dados dois caracteres lineares χ_1 e χ_2 de grupos G_1 e G_2 , então podemos formar um caracter $\tilde{\chi}$ do produto directo $\tilde{G} = G_1 \times G_2$ através de

$$\tilde{\chi}(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$$

[ABELIANO]– No caso de G_1 e G_2 **ABELIANOS**, e dado que existem tantos caracteres $\tilde{\chi}$ quanto elementos de $\hat{\tilde{G}} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$, verifica-se o isomorfismo $\hat{\tilde{G}} \simeq \tilde{G}$. Um teorema geral afirma que qualquer grupo **FINITO ABELIANO** é produto directo de grupos **CÍCLICOS**, pelo que este resultado se generaliza a $\hat{G} \simeq G$ para qualquer grupo G nestas condições.

[ABELIANO]– O **BI-DUAL** $\hat{\hat{G}}$ dum grupo abeliano G é naturalmente isomorfo a este, $\hat{\hat{G}} \simeq G$, através da escolha de uma "base" de sub-grupos cíclicos de G .

TEOREMA [4.2]

Os caracteres de um grupo **ABELIANO** G formam uma base **ORTOGONAL** do espaço vectorial $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(G)$ das funções de valor complexo em G .

DEMONSTRAÇÃO

Se χ_1 e χ_2 são dois caracteres diferentes de G , então $\chi_1(g')\overline{\chi_2(g')} = \frac{\chi_1(g')}{\chi_2(g')} \neq 1$ para algum $g' \in G$, pelo que

$$\begin{aligned}\sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} &= \sum_{g \in G} \chi_1(g'g)\overline{\chi_2(g'g)} = \chi_1(g')\overline{\chi_2(g')} \sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} \\ &\left(1 - \chi_1(g')\overline{\chi_2(g')}\right) \sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = 0\end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\langle \chi_2, \chi_1 \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = 0$$

Pelo mesmo argumento se mostra que, para qualquer caracter não trivial $\chi \neq 1$ de G ,

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0$$

■

II – OPERADORES DE PROJECCÃO

DEFINIÇÃO [4.3]

Dada uma representação $R : G \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ dum grupo abeliano finito num espaço vectorial complexo $V_{\mathbb{C}}$, a cada caracter χ_i corresponde um operador

$$P_{\chi} = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} R_g$$

designado **OPERADOR DE PROJECCÃO** porque verifica as condições:

- i. $P_{\chi}^2 = P_{\chi}$ para $\forall \chi \in \hat{G}$.
- ii. $P_{\chi_1} P_{\chi_2} = P_{\chi_2} P_{\chi_1} = 0$ sempre que $\chi_1 \neq \chi_2$
- iii. $\sum_{\chi \in \hat{G}} P_{\chi} = I$
- iv. $R_g P_{\chi} = \chi(g) P_{\chi}$ para qualquer $g \in G, \chi \in \hat{G}$

– De (iv) podemos concluir que, para qualquer $\psi \in V_{\mathbb{C}}$, $\psi_{\chi} = P_{\chi}\psi$ é um vector próprio

da representação, $\mathbf{R}_g \psi_\chi = \chi(g) \psi_\chi$. Os sub-espacos $\mathbf{P}_\chi V_C$ são assim invariantes para a representação \mathbf{R} , e V_C é uma soma directa destes sub-espacos quando $\chi \in \hat{G}$.

- De (iii) segue-se que podemos escrever qualquer $\psi \in V_C$ como $\psi = \sum_{\chi \in \hat{G}} \psi_\chi$.
- Esta decomposição de \mathbf{R} em componentes irredutíveis agindo em sub-espacos disjuntos $\mathbf{P}_\chi V_C$ designa-se **DECOMPOSIÇÃO CENTRAL** ou **DECOMPOSIÇÃO CANÓNICA** em "primários" disjuntos.

4.2 Caracteres de Grupos Não-Abelianos

Para grupos finitos não-abelianos é possível generalizar a noção de caracter e o seu papel na decomposição de representações, mas a determinação de \hat{G} é bastante mais complexa.

I – CARACTER DUMA REPRESENTAÇÃO DUM GRUPO

DEFINIÇÃO [4.4]

Dada uma representação \mathbf{R} de um grupo G , o **TRAÇO** das matrizes \mathbf{R}_g da representação determinam uma função sobre G

$$\begin{aligned} \chi : G &\rightarrow \text{AUT}(V) \\ g &\mapsto \chi(g) = \text{TR} [\mathbf{R}_g] \end{aligned}$$

designada o **CARACTER DA REPRESENTAÇÃO \mathbf{R}** .

- O caracter duma representação unidimensional é **LINEAR**.
- O caracter de uma representação irredutível designa-se **SIMPLES**.
- O caracter de uma representação redutível chama-se **COMPOSTO**.

TEOREMA [4.5]

Duas representações equivalentes \mathbf{R} e $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S}^{-1}$ têm o mesmo caracter, i.e. $\chi(g) = \tilde{\chi}(g)$.

Isto porque $\text{TR} [\mathbf{A} \mathbf{B}] = \text{TR} [\mathbf{B} \mathbf{A}]$ em geral, pelo que

$$\chi(g) = \text{TR} [\mathbf{R}_g] = \text{TR} [\mathbf{S} \tilde{\mathbf{R}}_g \mathbf{S}^{-1}] = \text{TR} [\mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{R}}_g] = \text{TR} [\tilde{\mathbf{R}}_g] = \tilde{\chi}(g)$$

TEOREMA [4.6]

O caracter χ de uma representação de G é uma **FUNÇÃO DE CLASSE** $\chi(C_\alpha)$ em G , i.e. é constante sobre cada classe de conjugação C_α de G .

Se g e g' pertencem à mesma classe C_α , então existe $\tilde{g} \in G$ tal que $g' = \tilde{g} g \tilde{g}^{-1}$. Pelos mesmos argumentos que anteriormente,

$$\chi(g') = \text{TR}[\mathbf{R}_{g'}] = \text{TR}[\mathbf{R}_{\tilde{g}} \mathbf{R}_g \mathbf{R}_{\tilde{g}}^{-1}] = \text{TR}[\mathbf{R}_{\tilde{g}}^{-1} \mathbf{R}_g \mathbf{R}_{\tilde{g}}] = \text{TR}[\mathbf{R}_g] = \chi(g)$$

TEOREMA [4.7]

Se G é um grupo **AMBIVALENTE** de dimensão finita (ou de Lie compacto), então o caracter χ duma representação qualquer de G é **REAL**, i.e.

$$\bar{\chi}(g) = \chi(g) \in \mathbb{R}, \quad \forall g \in G$$

Dado que qualquer representação \mathbf{R} dum grupo finito ou compacto é equivalente a uma unitária \mathbf{U} , e que qualquer matriz unitária verifica $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$ então, como $\text{TR}[\mathbf{A}^\dagger] = \text{TR}[\mathbf{A}]$, tem-se

$$\chi(g^{-1}) = \text{TR}[\mathbf{U}_g^{-1}] = \text{TR}[\mathbf{U}_g^\dagger] = \overline{\chi(g)}$$

Num grupo ambivalente, cada classe verifica $C_\alpha \equiv C_\alpha^{-1}$, pelo que $\chi(C_\alpha) = \chi(C_\alpha^{-1}) = \overline{\chi(C_\alpha)}$.

EXEMPLO: O grupo diédrico $D_n = \langle a, b \rangle$ com $a^2 = b^n = e$, $bab = a$ é ambivalente finito, donde todos os seus caracteres são reais. De facto

$$\begin{aligned} a^{-1} &= a = e^{-1} a e && \implies & a^{-1} \mathcal{R} a \\ b^{-1} &= a b a = a^{-1} b a && \implies & b^{-1} \mathcal{R} b \\ b^{-m} &= (a^{-1} b a)^m = a^{-1} b^m a && \implies & b^{-m} \mathcal{R} b^m \\ (ab^m)^{-1} &= b^{-m} a^{-1} = e^{-1} a b^m e && \implies & (ab^m)^{-1} \mathcal{R} a b^m \end{aligned}$$

4.3 Relações de Ortogonalidade

Defina-se em $\mathcal{F}_c(G)$ um produto escalar $\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g)$ onde $N = \#G$ designa o número de elementos de G . No caso de grupos infinitos, onde a noção de **MEDIDA INVARIANTE** μ existe (G grupo topológico, localmente compacto) e a medida do grupo $\Omega = \mu(G)$ é finita (G compacto), pode-se ainda definir um produto escalar idêntico

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_G \overline{\phi(g)} \psi(g) d\mu(g)$$

I – ORTOGONALIDADE DE FUNÇÕES SOBRE G

LEMA [4.8]

As entradas $u_{ij}^{(k)}(g)$ das matrizes $U_g^{(k)}$ associadas a representações **IRREDUTÍVEIS** de dimensão d_k de G são funções de $\mathcal{F}_C(G)$ **MÚTUAMENTE ORTOGONAIS**, i.e.

$$\left\langle u_{ij}^{(k_1)}, u_{rs}^{(k_2)} \right\rangle = \frac{1}{d_{k_1}} \delta_{ir} \delta_{js} \delta^{k_1 k_2}$$

DEMONSTRAÇÃO

Usando uma matriz **ARBITRÁRIA** $B \in \mathcal{L}(V_{(k_1)}, V_{(k_2)})$ constrói-se

$$T = \sum_{g \in G} U_{g^{-1}}^{(k_2)} B U_g^{(k_1)}$$

Mas então, se $U^{(k_1)}$ e $U^{(k_2)}$ forem representações **IRREDUTÍVEIS INEQUIVALENTES**,

$$T U_{g'}^{(k_1)} = U_{g'}^{(k_2)} T \Rightarrow T = 0 \quad (\text{Lema de Schur I})$$

Dado que B é completamente arbitrário,

$$t_{rj} = \sum_{g \in G} u_{rs}^{(k_2)}(g^{-1}) u_{ij}^{(k_1)}(g) b^{si} = 0 \Rightarrow \sum_{g \in G} \overline{u_{sr}^{(k_2)}(g)} u_{ij}^{(k_1)}(g) = 0$$

ou seja

$$(4-1) \quad \left\langle u_{rs}^{(k_2)}, u_{ij}^{(k_1)} \right\rangle = 0 \quad \text{se} \quad U^{(k_1)} \neq U^{(k_2)}$$

Por outro lado, se $U^{(k_1)} = U^{(k_2)}$, ($k_1 = k_2 = k$) e o outro Lema de Schur aplicado a

$$T U_{g'}^{(k)} = U_{g'}^{(k)} T \Rightarrow T = \lambda \mathbf{1} \quad (\text{Lema de Schur II})$$

onde $\lambda d_k = N \text{TR}[B]$. Então, de $T - \frac{N}{d_k} \text{TR}[B] \mathbf{1} = 0$ obtém-se

$$t_{rj} - \frac{N}{d_k} \text{TR}[B] \delta_{rj} = \left(\sum_{g \in G} u_{rs}^{(k)}(g^{-1}) u_{ij}^{(k)}(g) - \frac{N}{d_{k_1}} \delta_{si} \delta_{rj} \right) b^{si} = 0$$

ou seja

$$\sum_{g \in G} \overline{u_{sr}^{(k)}(g)} u_{ij}^{(k)}(g) = \frac{N}{d_{k_1}} \delta_{si} \delta_{rj}$$

ou

$$(4-2) \quad \left\langle u_{sr}^{(k)}, u_{ij}^{(k)} \right\rangle = \frac{1}{d_k} \delta_{is} \delta_{jr}$$

Em suma, podemos escrever simultaneamente (4-2) e (4-1) como $\left\langle u_{sr}^{(k_2)}, u_{ij}^{(k_1)} \right\rangle = \frac{1}{d_{k_1}} \delta_{si} \delta_{rj} \delta^{k_1 k_2}$. ■

II – 1ª RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE

TEOREMA [4.9]

Sejam $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \dots, \chi^{(p)}$ os caracteres de todas as representações irreduzíveis de G .
Estes caracteres obedecem às relações de ortogonalidade

$$\langle \chi^{(i)}, \chi^{(j)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \bar{\chi}^{(i)}(g) \chi^{(j)}(g) = \delta^{ij}$$

DEMONSTRAÇÃO

Para a demonstração vamos usar a expressão anterior e, contraindo nos índices apropriados

$$\delta^{ij} \delta^{rs} \langle u_{sr}^{(k_2)}, u_{ij}^{(k_1)} \rangle = \left(\frac{1}{d_{k_1}} \delta^{ij} \delta_{si} \delta_{rj} \delta^{rs} \right) \delta^{k_1 k_2} \implies \langle u_s^{(k_2)}, u_i^{(k_1)} \rangle = \left(\frac{1}{d_{k_1}} \delta_s^i \right) \delta^{k_1 k_2}$$

obtemos a desejada ortogonalidade entre caracteres $\langle \chi^{(k_2)}, \chi^{(k_1)} \rangle = \delta^{k_1 k_2}$. ■

- Como $\chi^{(i)}(x) = \chi^{(i)}(y)$ se $x, y \in C_\alpha$, e designando por $c_\alpha = \#C_\alpha$, teremos $N = \#G = \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha$ e as relações de ortogonalidade escrevem-se também

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \bar{\chi}^{(i)}(C_\alpha) \chi^{(j)}(C_\alpha) = \delta^{ij}$$

- Estas relações podem ser vistas como condições de ortonormalidade para um sistema de p vectores $\xi^{(i)}$, ($i = 1, 2, \dots, p$), num espaço vectorial de dimensão n onde

$$\xi^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} \sqrt{c_1} \chi^{(i)}(C_1) \\ \sqrt{c_2} \chi^{(i)}(C_2) \\ \vdots \\ \sqrt{c_n} \chi^{(i)}(C_n) \end{pmatrix}$$

Não podendo haver mais vectores ortogonais (o que implica linearmente independentes) do que a dimensão do espaço em que se definem, imediatamente vemos que $p \leq n$, ou seja

$$\left[\begin{array}{l} \text{o número } p \text{ de representações} \\ \text{irreduzíveis inequivalentes de } G \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{l} \text{o número } n \text{ de classes de} \\ \text{conjugação distintas de } G \end{array} \right]$$

De facto, iremos provar que estes dois números são iguais!

4.4 Representação Regular

Dado um grupo G existe sempre pelo menos uma representação, denominada **REPRESENTAÇÃO REGULAR** de G , que é uma representação $\mathbf{R} : G \rightarrow \text{AUT}(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G))$ no espaço vectorial das funções de G num corpo \mathbb{K} ,

e é definida da seguinte forma: a cada elemento $g \in G$ faz-se corresponder o operador linear

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_g : \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G) &\rightarrow \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G) \\ \phi &\mapsto \mathbf{R}_g \phi : G \rightarrow \mathbb{K} \\ g' &\mapsto (\mathbf{R}_g \phi)(g') = \phi(g'g) \end{aligned}$$

Para verificar que \mathbf{R} é uma representação, basta observar que, quaisquer que sejam $\phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ e $g, g', g'' \in G$, se tem

$$(\mathbf{R}_g(\mathbf{R}_{g'}\phi))(g'') = (\mathbf{R}_{g'}\phi)(g''g) = \phi(g''gg') = (\mathbf{R}_{gg'}\phi)(g'')$$

i.e., como ϕ é arbitrário,

$$\mathbf{R}_g \mathbf{R}_{g'} = \mathbf{R}_{gg'}$$

No caso de **GRUPOS FINITOS** podemos ir mais longe e explicitar esta representação em forma de matrizes $N \times N$. Basta fazer notar que, num grupo com N elementos $\{g_1, g_2, \dots, g_N\}$, existe uma base natural para o espaço $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ e que consiste nas funções

$$\varphi_j(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g = g_j \\ 0 & \text{se } g \neq g_j \end{cases}$$

Podemos então explicitar \mathbf{R} pela sua acção nos vectores desta base

$$\mathbf{R}_g \varphi_j = r_j^k(g) \varphi_k \quad \text{onde} \quad r_j^k(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g_j g = g_k \\ 0 & \text{se } g_j g \neq g_k \end{cases}$$

Como é imediatamente aparente \mathbf{R}_g é uma matriz com um só 1 em cada linha e coluna porque

$$\begin{aligned} g_j g = g_k = g_{k'} &\Rightarrow k = k' \\ g_j g = g_{j'} g = g_k &\Rightarrow j = j' \end{aligned}$$

Como para qualquer $g_i \in G$, $g_i g = g_i$ se e só se $g = e$, o resultado anterior permite concluir que o carácter da representação regular é

$$(4-3) \quad \chi^{\mathbf{R}}(g) = \begin{cases} N & \text{se } g = e \\ 0 & \text{se } g \neq e \end{cases}$$

Como todas as representações de dimensão finita de grupos finitos ou compactos, a representação regular \mathbf{R} é **COMPLETAMENTE REDUTÍVEL**, i.e. é possível encontrar uma matriz \mathbf{A} tal que a representação equivalente $\tilde{\mathbf{R}}_g = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{R}_g \mathbf{A}$ seja da forma

$$(4-4) \quad \tilde{\mathbf{R}}_g = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_g^{(i_1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(i_2)} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{U}_g^{(i_{r-1})} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{U}_g^{(i_r)} \end{pmatrix}$$

onde os $\mathbf{U}^{(i_k)}$ são representações irredutíveis (não necessariamente distintas). Se designarmos por $m^{(s)}$ o número de vezes que uma dada representação irredutível $\mathbf{U}^{(s)}$ aparece na representação $\tilde{\mathbf{R}}$ (i.e. a sua **MULTIPLICIDADE**) podemos ver que

I – DECOMPOSIÇÃO DA REPRESENTAÇÃO REGULAR

TEOREMA [4.10]

A **REPRESENTAÇÃO REGULAR** \mathbf{R} de um grupo finito G contém cópias de cada representação irredutível $\mathbf{U}^{(s)}$ com uma multiplicidade $m^{(s)}$ igual à dimensão d_s dessa representação irredutível, para todo o $s = 1, 2, \dots, p$.

DEMONSTRAÇÃO

Na sua forma completamente reduzida, a representação regular $\tilde{\mathbf{R}}$ tem evidentemente um traço

$$(4-5) \quad \chi^{\mathbf{R}}(g) = \text{TR}[\tilde{\mathbf{R}}_g] = \sum_{s=1}^p m^{(s)} \chi_g^{(s)}$$

portanto

$$\langle \chi^{(s')}, \chi^{\mathbf{R}} \rangle = \sum_{s=1}^p m^{(s)} \langle \chi^{(s')}, \chi^{(s)} \rangle = \sum_{s=1}^p m^{(s)} \delta^{ss'} = m^{(s')}$$

mas por outro lado, lembrando que $\chi^{(s)}(e) = d_s$ (a dimensão da representação) e (4-3), temos

$$\langle \chi^{(s')}, \chi^{\mathbf{R}} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} \bar{\chi}_g^{(s')} \chi_g^{\mathbf{R}} = \frac{1}{N} \bar{\chi}_e^{(s')} \chi_e^{\mathbf{R}} = d_{s'}$$

donde somos forçados a reconhecer que $m^{(s')} = d_{s'}$. ■

Mas então (4-5) será, para $g = e$

$$\chi_e^{\mathbf{R}} = N = \sum_{s=1}^p m^{(s)} \chi_e^{(s)} = \sum_{s=1}^p d_s^2$$

Acabámos assim de demonstrar o

II – TEOREMA DE BURNSIDE

TEOREMA [4.11]

- i. Cada representação irredutível $\mathbf{U}^{(s)}$ aparece na representação regular \mathbf{R} com uma multiplicidade $m^{(s)}$ igual á sua dimensão d_s
- ii. A soma dos quadrados das dimensões de todas as representações irredutíveis inequivalentes de G é igual à a ordem do grupo $N = \#G$

$$d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_p^2 = N$$

O espaço de funções $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ decompõe-se assim em soma directa de sub-espacos $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}^{(i_k)}(G)$ que são invariantes para a representação regular $\tilde{\mathbf{R}}$ e que suportam a sua representação irredutível $\mathbf{U}^{(i_k)}$, i.e. $\forall \phi^{(i_k)} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}^{(i_k)}(G)$,

$$\tilde{\mathbf{R}}_g \phi^{(i_k)} = \mathbf{U}_g^{(i_k)} \phi^{(i_k)} \in \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}^{(i_k)}(G)$$

Podemos portanto escrever, $\forall \phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$

$$(4-6) \quad \phi = \sum_{k=1}^r \phi^{(i_k)}$$

de tal forma que

$$(4-7) \quad \phi(g) = (\tilde{\mathbf{R}}_g \phi)(e) = \sum_{k=1}^r (\mathbf{U}_g^{(i_k)} \phi^{(i_k)})(e)$$

Por outro lado, ao mudar para a representação equivalente $\tilde{\mathbf{R}}$ mudamos para uma base de $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ que é

$$\tilde{\varphi}_j = \mathbf{A} \varphi_j = a_j^i \varphi_i \quad ; \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

na qual qualquer elemento de $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$ se pode decompor

$$\phi = \tilde{f}^j \tilde{\varphi}_j$$

Nesta base, a expressão da representação $\tilde{\mathbf{R}}$ é

$$\phi(g) = (\tilde{\mathbf{R}}_g \phi)(e) = \tilde{r}_i^j(g) \tilde{f}^i \tilde{\varphi}_j(e) = c_j^i \tilde{r}_i^j(g)$$

onde $c_j^i = \tilde{f}^i \tilde{\varphi}_j(e)$. Mas os únicos elementos \tilde{r}_i^j não-nulos são, por (4-4), as entradas das representações irredutíveis $\mathbf{U}^{(i_k)}$. Tendo em conta (4-6) e (4-7), e usando para cada i_k a decomposição $\phi^{(i_k)} = \tilde{f}^{(i_k)a} \tilde{\varphi}_a^{(i_k)}$, podemos ainda escrever

$$\phi(g) = \sum_{k=1}^r u_a^{(i_k)b}(g) \tilde{f}^{(i_k)a} \tilde{\varphi}_b^{(i_k)}(e) = \sum_{k=1}^r C_b^{(i_k)a} u_a^{(i_k)b}(g)$$

onde $C_b^{(i_k)a} = \tilde{f}^{(i_k)a} \tilde{\varphi}_b^{(i_k)}(e)$. Resumindo:

4.5 Relações de Ortogonalidade - 2ª Parte

I – SISTEMA ORTOGONAL COMPLETO DE FUNÇÕES EM G

TEOREMA 4.12

O conjunto de funções constituído pelos elementos matriciais $u_a^{(s)b}$ das representações irredutíveis inequivalentes $\mathbf{U}^{(s)}$ ($s = 1, 2, \dots, p$) de G é um **CONJUNTO COMPLETO** no espaço das funções sobre G , i.e. $\forall \phi \in \mathcal{F}_{\mathbb{K}}(G)$,

$$\phi(g) = \sum_{s=1}^p C_i^{(s)j} u_i^{(s)j}(g)$$

EXEMPLO [4.13]

O grupo S_3 tem três classes de conjugação:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(1)(2)(3)\} && \rightsquigarrow c_1 = 1 \\ C_2 &= \{(12), (13), (23)\} && \rightsquigarrow c_2 = 3 \\ C_3 &= \{(123), (132)\} && \rightsquigarrow c_3 = 2 \end{aligned}$$

Pelo teorema de Burnside, se d_i for a dimensão da i -ésima representação irredutível, deve haver tantas quanto o número de classes de conjugação (= 3) e então

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = \#S_3 = 3! = 6$$

A única solução é $d_1 = d_2 = 1$ e $d_3 = 2$. Das relações de ortogonalidade entre os caracteres, podemos reconstruir a tabela de caracteres

(4-8)

S_3	C_1 ($c_1=1$)	C_2 ($c_2=3$)	C_3 ($c_3=2$)
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	0	-1

II – 2ª RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE

TEOREMA [4.14]

Dado um grupo G de ordem N , com classes de conjugação C_α , os caracteres $\chi^{(i)}$, $i = 1, 2 \dots p$ de todas as representações irredutíveis de G verificam

$$\frac{c_\alpha}{N} \sum_{i=1}^p \overline{\chi^{(i)}(C_\alpha)} \chi^{(i)}(C_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

onde $c_\alpha = \#C_\alpha$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $U^{(i)}$ for uma das representações irredutíveis de dimensão d_i de G , defina-se a matriz

$$S_\alpha^{(i)} \equiv \sum_{x \in C_\alpha} U_x^{(i)}$$

então vê-se que $\forall y \in G$

$$S_\alpha^{(i)} U_y^{(i)} = U_y^{(i)} S_\alpha^{(i)} \implies S_\alpha^{(i)} = \lambda \mathbf{1}$$

pelo lema de Schur e a irredutibilidade de $U^{(i)}$. Tomando o traço da expressão anterior

$$\text{TR} [S_\alpha^{(i)}] = \lambda d_i = \sum_{x \in C_\alpha} \chi^{(i)}(x) = c_\alpha \chi^{(i)}(C_\alpha)$$

donde $\lambda = \frac{c_\alpha}{d_i} \chi^{(i)}(C_\alpha)$ e

$$S_\alpha^{(i)} = \frac{c_\alpha}{d_i} \chi^{(i)}(C_\alpha) \mathbf{1}$$

Mas então

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\alpha^{(i)} \mathbf{S}_\beta^{(i)} &= \frac{c_\alpha}{d_i} \frac{c_\beta}{d_i} \chi^{(i)}(C_\alpha) \chi^{(i)}(C_\beta) \mathbf{1} = \\ &= \sum_{x \in C_\alpha} \mathbf{U}_x^{(i)} \sum_{y \in C_\beta} \mathbf{U}_y^{(i)} = \sum_{z \in C_\alpha C_\beta} \mathbf{U}_z^{(i)} = \\ &= \sum_{\gamma=1}^n h_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{S}_\gamma^{(i)} = \sum_{\gamma=1}^n h_{\alpha\beta}^\gamma \frac{c_\gamma}{d_i} \chi^{(i)}(C_\gamma) \mathbf{1} \end{aligned}$$

onde usámos $C_\alpha C_\beta = \sum_{\gamma=1}^n h_{\alpha\beta}^\gamma C_\gamma$. Daqui se obtém a seguinte relação

$$\sum_{\gamma=1}^n h_{\alpha\beta}^\gamma c_\gamma \chi^{(i)}(C_\gamma) = \frac{1}{d_i} c_\alpha c_\beta \chi^{(i)}(C_\alpha) \chi^{(i)}(C_\beta)$$

pelo que, somando em i

$$\sum_{\gamma=1}^n h_{\alpha\beta}^\gamma c_\gamma \sum_{i=1}^p d_i \chi^{(i)}(C_\gamma) = c_\alpha c_\beta \sum_{i=1}^p \chi^{(i)}(C_\alpha) \chi^{(i)}(C_\beta)$$

Recordemos que, para a representação regular,

$$\sum_{i=1}^p d_i \chi^{(i)}(x) = \chi^{\mathbf{R}}(x) = \begin{cases} N, & \text{se } x = e \\ 0, & \text{se } x \neq e \end{cases} \implies \chi^{\mathbf{R}}(C_\alpha) = N \delta_{\alpha 1}$$

pelo que a expressão anterior se simplifica para

$$\sum_{\gamma=1}^n h_{\alpha\beta}^\gamma c_\gamma N \delta_{\gamma 1} = c_\alpha c_\beta \sum_{i=1}^p \chi^{(i)}(C_\alpha) \chi^{(i)}(C_\beta) = N h_{\alpha\beta}^{-1}$$

Em (2-3) mostrámos que

$$h_{\alpha\beta}^{-1} = c_\beta \delta_{\bar{\alpha}\beta} = \begin{cases} c_\beta & \text{para } C_\beta = C_{\bar{\alpha}} \equiv C_\alpha^{-1} \\ 0 & \text{para } C_\beta \neq C_{\bar{\alpha}} \end{cases}$$

e $\chi^{(i)}(C_\alpha) = \bar{\chi}^{(i)}(C_\alpha^{-1}) = \bar{\chi}^{(i)}(C_{\bar{\alpha}})$ donde se obtém

$$c_\alpha \sum_{i=1}^p \bar{\chi}^{(i)}(C_{\bar{\alpha}}) \chi^{(i)}(C_\beta) = N \delta_{\bar{\alpha}\beta}$$

A "ortogonalidade" desejada decorre de observar que $c_\alpha = c_{\bar{\alpha}}$ e partindo de $C_{\bar{\alpha}}$ em vez de C_α . ■

4.6 Representações Irredutíveis

I – CLASSES E REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS

TEOREMA 4.15

O número p de representações **IRREDUTÍVEIS INEQUIVALENTES** $U^{(i)}$ de G é **IGUAL** ao número n de **CLASSES DE CONJUGAÇÃO** C_α distintas de G .

DEMONSTRAÇÃO

Da **1ª RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE** com $i = j$ resulta, somando para todas as representações irredutíveis inequivalentes de G

$$\sum_{i=1}^p \sum_{\alpha=1}^n \frac{c_\alpha}{N} \bar{\chi}^{(i)}(C_\alpha) \chi^{(i)}(C_\alpha) = p$$

Da mesma forma, da **2ª RELAÇÃO DE ORTOGONALIDADE** com $\alpha = \beta$ resulta, somando para todas as classes de conjugação

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^p \frac{c_\alpha}{N} \bar{\chi}^{(i)}(C_\alpha) \chi^{(i)}(C_\alpha) = n$$

Mas estas duas expressões são iguais por troca da ordem de soma, e por isso se conclui que $p = n$. ■

As relações de ortogonalidade entre caracteres permitem mostrar que

TEOREMA 4.16

Duas representações U e \tilde{U} de G são **EQUIVALENTES SSE** tiverem o mesmo caracter, i.e.

$$\chi = \tilde{\chi} \iff U \simeq \tilde{U}$$

DEMONSTRAÇÃO

Se U e \tilde{U} forem redutíveis, então são completamente redutíveis e

$$U \simeq \begin{pmatrix} U_g^{(i_1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & U_g^{(i_2)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_g^{(i_{r-1})} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_g^{(i_r)} \end{pmatrix} \quad \tilde{U} \simeq \begin{pmatrix} U_g^{(j_1)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & U_g^{(j_2)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & U_g^{(j_{s-1})} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & U_g^{(j_s)} \end{pmatrix}$$

onde os $U^{(i)}$ são irredutíveis que aparecem em U com multiplicidade $m^{(i)}$ e em \tilde{U} com multiplicidade $\tilde{m}^{(i)}$. (Uma representação irredutível $U^{(j)}$ que não apareça em U tem multiplicidade $m^{(j)} = 0$).

Se os caracteres de U e \tilde{U} são iguais

$$\chi - \tilde{\chi} = 0 = \text{TR}[U] - \text{TR}[\tilde{U}] \Rightarrow \sum_{i=1}^p (m^{(i)} - \tilde{m}^{(i)}) \chi^{(i)} = 0 \Rightarrow m^{(i)} = \tilde{m}^{(i)}$$

pela ortogonalidade dos caracteres das irredutíveis $\chi^{(i)}$. Isto significa pois que U e \tilde{U} são equivalentes à mesma representação onde $U^{(i)}$ aparece com multiplicidade $m^{(i)} = \tilde{m}^{(i)}$. ■

Como consequência ainda da ortogonalidade podemos escrever a **NORMA DO CARACTER** de qualquer representação U de G como sendo $\|\chi\|^2 = (\chi, \chi) = \sum_{i=1}^p m^{(i)2}$, pelo que mostrámos o

TEOREMA 4.17

Uma representação do grupo G é **IRREDUTÍVEL** se e só se o seu caracter verificar $\|\chi\|^2 = 1$.

TEOREMAS DE DIMENSÃO

- Para grupos finitos, dado que existe n tal que $g^n = e$, é possível mostrar que os caracteres de representações R de G são inteiros algébricos. Um inteiro algébrico é um número complexo $z \in \mathbb{C}$ que é raiz de um polinómio de coeficientes inteiros $f[x] = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ com o primeiro $a_n = 1$ (chamado polinómio mínimo). O grau n deste polinómio é o grau do inteiro algébrico, e só os inteiros racionais ($z \in \mathbb{Z}$) são inteiros algébricos de grau 1, como soluções de $x + a_0 = 0$ com a_0 inteiro. As raízes de polinómios ciclotómicos

$$x^n - 1 = 0$$

são inteiros algébricos de grau n , e precisamente são deste tipo os elementos diagonais de R_g , para qualquer $g \in G$, já que $R_g^n = R_g^n = Id$, donde $r_i^i(g)^n - 1 = 0$ para cada $i = 1, \dots, d_R$. Os inteiros algébricos formam um anel¹ pelo que a sua soma $\text{TR}[R_g] = \chi_g$ ainda é um inteiro algébrico. Pode-se então provar que os números $c_\alpha \frac{\chi_\alpha^{(i)}}{\chi_1^{(i)}}$ são ainda inteiros algébricos, e portanto

$$\sum_{k=1}^p \sum_{\alpha=1}^n c_\alpha \frac{\chi_\alpha^{(i)}}{\chi_1^{(i)}} \chi_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^p \delta^{i\bar{k}} \frac{\#G}{\chi_1^{(i)}} = \frac{\#G}{\chi_1^{(i)}}$$

também. Mas então o lado direito desta equação tem de ser inteiro. Como consequência disso, vemos que

$$\frac{\#G}{\chi_1^{(i)}} = \frac{\#G}{d_i} \in \mathbb{N}$$

i.e. **A DIMENSÃO DE QUALQUER REPRESENTAÇÃO IRREDUTÍVEL DEVE SER DIVISOR DA ORDEM DE G .**

- Dado um sub-grupo normal $N \subset G$, o quociente G/N é ainda um grupo de índice $[G : N]$, e é possível levantar as suas representações irredutíveis a representações irredutíveis

¹ - Birkhoff & MacLane, A Survey of Modern Algebra

de G com a mesma dimensão d_i (ver à frente Capítulo 4.7). Neste caso, d_i também tem que ser divisor de $[G : N]$. Existe um **TEOREMA DE ITO** que afirma que as dimensões das representações irredutíveis de G são limitadas pelo maior índice $[G : N]$ de sub-grupos normais $N \triangleleft G$.

- Note que o **NÚCLEO** de qualquer representação linear de G , i.e. os elementos $n \in G$ tais que $\chi_n = 1$ é um sub-grupo normal de G . Com efeito, este núcleo deve ser a união de classes de conjugação inteiras, já que os caracteres são constantes sobre estas. A observação da tabela de caracteres lineares de G permite facilmente detectar este núcleo.

EXEMPLO [4.18]

II – REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS DE \mathcal{D}_4

Classes de Conjugação

A partir de $a = bab$ e $b^n = e$ deduz-se $a = b^m ab^m$ e $b^m a = b^{m+1} ab = ab^{n-m}$. Assim, no caso de \mathcal{D}_4 , $b^2 a = ab^2$ e as classes de conjugação são:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{e\} && \iff (a^r b^s) e (a^r b^s)^{-1} = e \\
 C_2 &= \{b^2\} && \iff (a^r b^s) b^2 (a^r b^s)^{-1} = a^r b^2 b^s (a^r b^s)^{-1} = b^2 (a^r b^s) (a^r b^s)^{-1} = b^2 \\
 C_3 &= \{a, ab^2\} && \iff (a^r b^s) a (a^r b^s)^{-1} = a^r (b^s a b^s) b^{-2s} a^{-r} = a a^r b^{-2s} a^{-r} = ab^{2s} (b^{-2s} a^r b^{-2s}) a^{-r} = ab^{2s} \\
 C_4 &= \{b, b^3\} && \iff (a^r b^s) b (a^r b^s)^{-1} = a^r b a^{-r} = b^3 \\
 C_5 &= \{ab, ab^3\} && \iff (a^r b^s) ab (a^r b^s)^{-1} = a a^r b^{n-2s+1} a^{-r} = ab^{(-1)^{r+1}(2s-1)}
 \end{aligned}$$

e a tabela de inversos é

$$\begin{aligned}
 e, e^{-1} &= e && b^2, (b^2)^{-1} = b^2 \\
 a, a^{-1} &= a && ab, (ab)^{-1} = ab^3 \\
 b, b^{-1} &= b^3 && ab^2, (ab^2)^{-1} = ab^2
 \end{aligned}$$

A ordem do grupo é $\#G = 8$ e a cardinalidade das classes de conjugação $c_1 = c_2 = 1, c_3 = c_4 = c_5 = 2$.

Tabela de Multiplicação de Classes

A álgebra das classes de conjugação tem a seguinte tabela de multiplicação

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_2	C_2	C_1	C_3	C_4	C_5
C_3	C_3	C_3	$2C_1 + 2C_2$	$2C_5$	$2C_4$
C_4	C_4	C_4	$2C_5$	$2C_1 + 2C_2$	$2C_3$
C_5	C_5	C_5	$2C_4$	$2C_3$	$2C_1 + 2C_2$

donde se deduzem as seguintes constantes de estrutura agrupadas na forma $h^\gamma = (h_{\alpha\beta}^\gamma)$:

$$h^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad h^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad h^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad h^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad h^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimensão das representações Irredutíveis

De acordo com o teorema de Burnside devemos ter 5 representações irredutíveis com dimensões d_i que verificam

$$\sum_{i=1}^5 d_i^2 = \#G = 8$$

As dimensões d_i têm que ser divisores de $\#G$, e $d_1 = 1$ por convenção é a representação trivial. $d_i = 4$ está fora de questão, pelo que $d_i = 1$ ou $d_i = 2$. A solução única é $d_i = 1, 1, 1, 1, 2$ já que

$$1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8$$

Temos assim uma representação irredutível de dimensão $d_5 = 2$ e quatro unidimensionais.

Tabela de Caracteres

Para as representações unidimensionais, já que os caracteres são lineares e verificam

$$\chi(g g') = \chi(g) \chi(g')$$

devemos ter

$$\chi(a^2) = \chi(b^4) = \chi(e) = 1 = \chi(a)^2 = \chi(b)^4$$

donde $\chi(a) = \pm 1$ bem como $\chi(b) = \pm 1$. Os caracteres unidimensionais são assim produtos destes dois. Assim, para $i = 1, 2, 3, 4$

$$\chi_1^{(i)} = 1 \quad ; \quad \chi_2^{(i)} = \chi^{(i)}(b)^2 = 1 \quad ; \quad \chi_3^{(i)} = \chi_3^{(i)}(a) \quad ; \quad \chi_4^{(i)} = \chi^{(i)}(b) \quad ; \quad \chi_5^{(i)} = \chi^{(i)}(a)\chi^{(i)}(b)$$

Por outro lado para $i = 5$, tem-se $\chi_1^{(5)} = \chi^{(5)}(e) = 2$, e pela 2ª relação de ortogonalidade,

$$c_\alpha \sum_{r=1}^5 \overline{\chi_\alpha^{(r)}} \chi_\beta^{(r)} = \#G \delta_{\alpha\beta}$$

ou seja, usando $\alpha = 1$ e $\beta = 2$,

$$1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + \chi_1^{(5)} \times \chi_2^{(5)} = 0$$

donde $\chi_2^{(5)} = -2$. Pela 1ª relação de ortogonalidade

$$\sum_{\alpha=1}^5 c_\alpha \chi_\alpha^{(r)} \chi_\alpha^{(s)} = \#G \delta^{rs}$$

obtemos, para $r = s = 5$,

$$1 \times 4 + 1 \times 4 + 2(\chi_3^{(5)^2} + \chi_4^{(5)^2} + \chi_5^{(5)^2}) = 8$$

donde

$$\chi_3^{(5)^2} + \chi_4^{(5)^2} + \chi_5^{(5)^2} = 0 \quad \text{i.e.} \quad \chi_3^{(5)} = \chi_4^{(5)} = \chi_5^{(5)} = 0$$

(4-9)

\mathcal{D}_4	C_1 ($c_1=1$)	C_2 ($c_2=1$)	C_3 ($c_3=2$)	C_4 ($c_4=2$)	C_5 ($c_5=2$)
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

Representação Irredutível Bi-Dimensional

Para obter a representação irredutível correspondente a $i = 5$, comecemos por relembrar o operador

$$S_\alpha^{(i)} = \sum_{g \in C_\alpha} U_g^{(i)} = \frac{c_\alpha}{d_i} \chi_\alpha^{(i)} \text{Id}$$

utilizado na demonstração da 2ª relação de ortogonalidade. Dado que $S_\alpha^{(i)}$ comuta com todos os operadores da representação irredutível, concluímos pelo lema de Schur que tinha de ser múltiplo da identidade. Assim, para as diferentes classes obtemos;

$$U_e = \text{Id} \quad U_{b^2} = -\text{Id} \quad U_a + U_{ab^2} = 0 \quad U_b + U_{b^3} = 0 \quad U_{ab} + U_{ab^3} = 0$$

com $\text{Tr}[U_a] = \text{Tr}[U_b] = 0$. Pondo

$$U_a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U_b = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_3 & -\beta_1 \end{pmatrix}$$

deduz-se de $U_a^2 = U_a^2 = \text{Id}$ que $\alpha_1^2 + \alpha_2 \alpha_3 = 1$, e de $U_{b^2} = U_b^2 = -\text{Id}$, $\beta_1^2 + \beta_2 \beta_3 = -1$. Embora possamos escolher uma destas matrizes como diagonal, não podem ambas sê-lo. Se escolhermos $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, então a condição $\text{Tr}[U_{ab}] = \text{Tr}[U_a U_b] = 2\beta_1 = 0$ significa que $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -\frac{1}{\beta_3}$. Para ser unitária, a representação deve verificar $U_b^\dagger U_b = \text{Id}$, pelo que $|\beta_2|^2 = |\beta_3|^2 = 1$ portanto $\beta_2 = e^{i\theta}$ e $\beta_3 = -e^{-i\theta}$. Assim

$$U_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U_b = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ -e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

e escolhendo $\theta = 0$ teríamos uma representação real

$$U_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad U_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se escolhêssemos U_b diagonal, então $\beta_1 = i$ e $\text{Tr}[U_{ab}] = \text{Tr}[U_a U_b] = 2i \alpha_1 = 0$ donde $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_3}$ e teríamos a representação equivalente

$$U_a = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad U_b = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

EXEMPLO [4.19]

III – REPRESENTAÇÕES DA ÁLGEBRA QUATERNIÓICA

Considere o conjunto \mathcal{Q} gerado pelos elementos de base $\{i, j, k\}$ que obedecem às seguintes relações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; ij = -ji = k; jk = -kj = i; ki = -ik = j$$

Isto não é um grupo mas sim uma **ÁLGEBRA**. Contudo é possível definir um grupo Q da seguinte forma. Escrevendo $\bar{x} = -x$, de forma que

$$\bar{1} = -1; \bar{i} = -i; \bar{j} = -j; \bar{k} = -k$$

O grupo quaterniónico Q é o grupo de ordem 8 formado pelos elementos

$$Q = \{1, \bar{1}, i, \bar{i}, j, \bar{j}, k, \bar{k}\}$$

com as seguintes regras de multiplicação

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 &= \bar{1}; \bar{1}x = x; \bar{1} = \bar{x} \\ ij = k & \quad ; \bar{i}\bar{j} = k; ji = \bar{k} = \bar{i}\bar{j} \end{aligned}$$

As representações deste grupo Q podem não vir a verificar a identidade $R_{\bar{x}} = -R_x$ (i.e. não se estendem a uma representação da álgebra), por isso designaremos as que verificam também esta identidade como **REPRESENTAÇÕES ADMISSÍVEIS PARA A ÁLGEBRA \mathcal{Q}** .

Classes de Conjugação

As classes de Conjugação de Q são

$$(4-10) \quad C_1 = \{1\} \quad ; \quad C_2 = \{\bar{1}\} \quad ; \quad C_3 = \{i, \bar{i}\} \quad ; \quad C_4 = \{j, \bar{j}\} \quad ; \quad C_5 = \{k, \bar{k}\},$$

donde esperamos 5 representações irreduzíveis do grupo. Pelo teorema de Burnside verificamos que

$$8 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2,$$

por isso uma destas representações irreduzíveis será 2-dimensional, e as restantes são lineares (1-dimensional). Mas estas representações lineares não são admissíveis como representações da álgebra \mathcal{Q} já que verificam $U_{\bar{x}} = U_x$. De facto, por exemplo

$$U_k = U_{ij} = U_{ji} = U_{\bar{k}},$$

já que as representações unidimensionais são comutativas.

A representação 2-dimensional irreduzível da álgebra e do grupo é, em termos de matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definida por

$$U_i = -i\sigma_1; U_j = -i\sigma_2; U_k = -i\sigma_3$$

e pela relação $U_{\bar{x}} = -U_x$.

Tabela de Caracteres do Grupo Quaterniónico

O grupo dos quaterniões Q é ambivalente, o que significa que os seus caracteres são reais

$$(4-11) \quad \bar{\chi}_g = \chi_g.$$

Para calcular os caracteres $\chi^{(r)}$ para as representações lineares $r = 1, 2, 3, 4$, sabemos já que em todas se tem para o elemento identidade $\chi_1^{(r)} = 1$. Por outro lado, de $i^4 = 1$ deduz-se que $\chi_i^{(r)4} = 1$ ou seja

$$\chi_i^{(r)} = \sqrt[4]{1} = e^{i \frac{2\pi}{4} m} \quad (m = 0, 1, 2, 3).$$

Contudo, para $m = 1, 3$ obtemos valores complexos $e^{i \frac{2\pi}{4} m} = \pm i$ que violam **(4-11)**, por isso apenas consideramos as soluções reais $\chi_i^{(r)} = \pm 1$.

O mesmo raciocínio se aplica a j e k , pelo que também $\chi_j^{(r)} = \pm 1$ e $\chi_k^{(r)} = \pm 1$.

De $i^2 = \bar{1}$ deduz-se que

(4-12)
$$\chi_1^{(r)} = \chi_{\bar{1}}^{(r)} = \chi_i^{(r)2} = 1$$

Poderíamos usar relações de ortogonalidade para justificar porque é que, para cada carácter linear $\chi^{(r)}$, devemos ter, entre $\chi_i^{(r)}$, $\chi_j^{(r)}$ e $\chi_k^{(r)}$, dois deles iguais a -1 e o terceiro igual a 1 . De facto, ortogonalidade com a representação identidade $\chi^{(1)}$ implica que a soma sobre as classes de conjugação **(4-10)** resulta em

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} \overline{\chi_{\alpha}^{(1)}} \chi_{\alpha}^{(r)} = 0 = \frac{1}{8} [1 + 1 + 2(\chi_i^{(r)} + \chi_j^{(r)} + \chi_k^{(r)})]$$

donde se conclui

$$\chi_i^{(r)} + \chi_j^{(r)} + \chi_k^{(r)} = -1.$$

Mas a razão óbvia é que a união das classes C_{α} para as quais (numa representação irredutível) se tem $\chi_{\alpha}^{(r)} = \chi_1^{(r)} = 1$ é o núcleo (kernel) da representação e deve portanto ser um sub-grupo normal dentro do grupo. Mas sub-grupos normais de Q são

$$\begin{aligned} N_1 &= \{1\} &&= C_1 \\ N_2 &= \{1, \bar{1}\} &&= C_1 \oplus C_2 \\ N_3 &= \{1, \bar{1}, i, \bar{i}\} &&= C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \\ N_4 &= \{1, \bar{1}, j, \bar{j}\} &&= C_1 \oplus C_2 \oplus C_4 \\ N_5 &= \{1, \bar{1}, k, \bar{k}\} &&= C_1 \oplus C_2 \oplus C_5 \end{aligned}$$

ou seja, são no máximo união de três classes de conjugação, pelo que não pode haver mais de 3 valores iguais a 1 para cada representação irredutível. Descontando a identidade e tendo em conta **(4-12)**, resta apenas um, sendo os restantes iguais a -1 .

Quanto à representação bidimensional, podemos usar as relações de ortogonalidade para obter de

$$c_{\alpha} \frac{1}{N} \sum_{r=1}^5 \overline{\chi_{\alpha}^{(r)}} \chi_{\beta}^{(r)} = \delta_{\alpha\beta}$$

para $\alpha = 1, \beta = 2$, a identidade

$$\frac{1}{8}(1 + 1 + 1 + 1 + 2\chi_2^{(5)}) = 0$$

donde $\chi_2^{(5)} = -2$.

A outra relação de ortogonalidade dita que

$$\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^5 c_{\alpha} \overline{\chi_{\alpha}^{(r)}} \chi_{\alpha}^{(s)} = \delta^{rs}$$

e para $r = 5, s = 5$,

$$\frac{1}{8} (2^2 + 2^2 + 2(\chi_3^{(5)2} + \chi_4^{(5)2} + \chi_5^{(5)2})) = 1$$

donde obrigatoriamente $\chi_3^{(5)} = \chi_4^{(5)} = \chi_5^{(5)} = 0$.

Deduzimos assim a tabela

	$C_1 = \{1\}$ $\{e\}$	$C_2 = \{\bar{1}\}$ $\{a^2 = b^2\}$	$C_3 = \{i, \bar{i}\}$ $\{a, a^3\}$	$C_4 = \{j, \bar{j}\}$ $\{b, b^3\}$	$C_5 = \{k, \bar{k}\}$ $\{ab, ba\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

Grupo Quaterniónico Q

Note-se que esta tabela é idêntica à do grupo diédrico D_4 , mas Q não é isomorfo a D_4 , o que significa que não podemos usar caracteres para distinguir os grupos. De facto,

$$Q = \langle \bar{1}, i, j, k \rangle$$

com as regras

$$i^2 = j^2 = k^2 = \bar{1}, \bar{1}x = x\bar{1} = \bar{x}, ij = k, \bar{i}\bar{j} = k, ji = \bar{k} = \bar{i}j = i\bar{j}$$

é isomorfo a

$$Q = \langle a, b \rangle$$

com relações definidoras

$$a^4 = b^4 = 1, a^2 = b^2,$$

o que não é equivalente à definição de D_4 . Isto revela-se nomeadamente em

$$C_3(Q) = \{a, a^3\}$$

onde $a^{-1} = a^3$ em Q , enquanto que

$$C_3(D_4) = \{a, ab^2\}$$

onde $a^{-1} = a, (ab^2)^{-1} = ab^2$ em D_4 , e não existe em Q nenhuma classe ambivalente com um par de elementos que sejam os seus próprios inversos.

EXEMPLO [4.20]

IV – REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS DE S_3

Já determinámos a tabela de caracteres de S_3 na pág. 92, (4-8). Procuremos determinar uma representação irredutível de dimensão 2 de S_3 , grupo não abeliano, a qual corresponde ao carácter

$$\chi^{(3)}(e) = \chi^{(3)}(C_1) = 2 \quad ; \quad \chi^{(3)}(C_2) = 0 \quad ; \quad \chi^{(3)}(C_3) = -1$$

É evidente que basta determinar as representações matriciais dos geradores do grupo, neste caso as transposições $\sigma_1 = (12)(3)$ e $\sigma_2 = (1)(23)$. Procurando representações unitárias, podemos escolher

$$\mathbf{U}_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

diagonal (porque qualquer matriz unitária é diagonalizável) embora \mathbf{U}_{σ_2} e \mathbf{U}_{σ_3} não possam ser também diagonais. Como $\sigma_1 \in C_2$ deve-se ter

$$(4-13) \quad \chi(\sigma_1) = \text{TR}[\mathbf{U}_{\sigma_1}] = a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$$

Unitariedade exige que $|a|^2 = 1$, e $\sigma_1^2 = e$ significa $\mathbf{U}_{\sigma_1}^2 = \mathbf{Id}$ ou seja $a^2 = 1$, donde $a = \pm 1$ são possíveis, mas as matrizes resultantes são equivalentes. Assim escolhemos

$$\mathbf{U}_{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A seguir, dado que $\sigma_2 \in C_2$, procuramos encontrar outra matriz de traço nulo

$$\mathbf{U}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$$

Unitariedade requer que

$$\mathbf{U}_{\sigma_2}^\dagger \mathbf{U}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} \alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta} & -\beta \bar{\alpha} + \alpha \bar{\gamma} \\ \gamma \bar{\alpha} - \alpha \bar{\beta} & \alpha \bar{\alpha} + \gamma \bar{\gamma} \end{pmatrix} = \mathbf{Id}$$

donde se deduz

$$(4-14) \quad |\beta|^2 = |\gamma|^2 = 1 - |\alpha|^2 \quad ; \quad \beta = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \bar{\gamma}$$

Por outro lado $\sigma_2^2 = e \in C_1$ significa que

$$\mathbf{U}_{\sigma_2}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \beta\gamma \end{pmatrix} = \mathbf{Id}$$

o que pronuncia, usando (4-14)

$$(4-15) \quad \beta\gamma = 1 - \alpha^2 = \frac{\alpha}{\bar{\alpha}}(1 - |\alpha|^2) \quad \Rightarrow \quad \bar{\alpha} = \alpha \quad ; \quad \beta = \bar{\gamma}$$

(portanto α é real).

Agora $\sigma_1\sigma_2 \in C_2$ e $\chi(C_2) = -1$ donde, usando (4-15) e (4-14),

$$(4-16) \quad \text{TR}[\mathbf{U}_{\sigma_1\sigma_2}] = \text{TR} \left[\begin{pmatrix} \alpha & \bar{\gamma} \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \right] = 2\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\theta} \quad ; \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\theta}$$

Portanto, usando $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$


$$\mathbf{U}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\theta} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\theta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{U}_{\sigma_3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\theta} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\theta} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Os restantes elementos são $\sigma_4 = \sigma_1\sigma_2$ e $\sigma_5 = \sigma_1\sigma_3$ donde

$$U_{\sigma_4} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\theta} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} ; \quad U_{\sigma_5} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\theta} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\theta} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$


O parâmetro θ é arbitrário, e a escolha de $\theta = 0$ dá uma representação equivalente. É um facto que qualquer representação irredutível de S_n pode ser escolhida real.

V – REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS ASSOCIADAS A TABELAS DE YOUNG

Para as representações do grupo simétrico S_n existem vários mecanismos que automatizam o seu cálculo em função dos diagramas de Young associados a cada classe de conjugação. Consideremos um exemplo para o caso de S_3 e a classe de conjugação determinada por um **DIAGRAMA DE YOUNG** $\{2, 1\}$ .

Para ver a dimensão da representação que lhe está associada basta descobrir de quantas formas se podem obter quadros de Young diferentes neste diagrama, inscrevendo números de forma que, **QUER NAS LINHAS QUER NAS COLUNAS**, o seu valor **CRESÇA SEMPRE**. Neste caso há apenas 2,

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} ; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

por isso a dimensão da representação é 2. Designemos por K_3 o sub-grupo de permutações $\kappa \in S_3$ que deixa os elementos na mesma coluna da tabela de Young (embora os troque de linha), e Λ_3 o conjunto de permutações λ que deixam os elementos da tabela na mesma linha. Escolhendo  podemos enumerar os seus elementos e os de $K_3\Lambda_3$

$$K_3 = \{e, \kappa_1 = (13)\} ; \quad \Lambda_3 = \{e, \lambda_1 = (12)(3)\}$$

$$K_3\Lambda_3 = \{e, e\lambda_1 = (12), \kappa_1e = (13), \kappa_1\lambda_1 = (123)\}$$

A representação terá como suporte um subespaço vectorial de $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}(S_n)$ gerado pela função

$$\varphi(g) = \begin{cases} \epsilon_{\kappa} & \text{se } g = \kappa\lambda \in K_3\Lambda_3 \\ 0 & \text{se } g \neq \kappa\lambda \in K_3\Lambda_3 \end{cases}$$

onde $\epsilon_{\kappa} = \pm 1$ é a paridade da permutação $\kappa \in K_3$, e pelas suas transladadas

$$\varphi_{g'}(g) = \varphi(gg')$$

A representação em si fica definida por

$$\mathbf{R}_{g''}\varphi_{g'}(g) = \varphi_{g'}(gg'') = \varphi_{g''g'}(g)$$

e verifica $\mathbf{R}_{g_1}\mathbf{R}_{g_2} = \mathbf{R}_{g_1g_2}$.

Note-se que apenas duas destas funções podem ser linearmente independentes, uma vez que a representação tem dimensão 2. As funções φ e φ_{κ_1} são linearmente independentes, como se pode comprovar pelo seu grafo em \mathcal{S}_3

\mathcal{S}_3	e (1)(2)(3)	λ_1 (12)	$\lambda_1\kappa_1\lambda_1$ (23)	κ_1 (13)	$\kappa_1\lambda_1$ (123)	$\lambda_1\kappa_1$ (132)
φ	1	1	0	-1	-1	0
φ_{κ_1}	-1	0	-1	1	0	1

então

\mathcal{S}_3	e (1)(2)(3)	λ_1 (12)	$\lambda_1\kappa_1\lambda_1$ (23)	κ_1 (13)	$\kappa_1\lambda_1$ (123)	$\lambda_1\kappa_1$ (132)
$\mathbf{R}_{\lambda_1}\varphi$	1	1	0	-1	-1	0
$\mathbf{R}_{\lambda_1}\varphi_{\kappa_1}$	0	-1	1	0	1	-1
$\mathbf{R}_{\kappa_1}\varphi$	-1	0	-1	1	0	1
$\mathbf{R}_{\kappa_1}\varphi_{\kappa_1}$	1	1	0	-1	-1	0

Utilizando $\varphi, \varphi_{\kappa_1}$ como base podemos ver de

$$\mathbf{R}_{\lambda_1}\varphi = \varphi \quad ; \quad \mathbf{R}_{\lambda_1}\varphi_{\kappa_1} = -(\varphi + \varphi_{\kappa_1}) \quad ; \quad \mathbf{R}_{\kappa_1}\varphi = \varphi_{\kappa_1} \quad ; \quad \mathbf{R}_{\kappa_1}\varphi_{\kappa_1} = \varphi$$

donde

$$\mathbf{R}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Daqui se geram as restantes matrizes da representação irredutível (que não é unitária)

$$\mathbf{R}_{\lambda_1\kappa_1\lambda_1} = \mathbf{R}_{\lambda_1}\mathbf{R}_{\kappa_1}\mathbf{R}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_{\kappa_1\lambda_1} = \mathbf{R}_{\kappa_1}\mathbf{R}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_{\lambda_1\kappa_1} = \mathbf{R}_{\lambda_1}\mathbf{R}_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta representação² não é unitária. Para transformar numa equivalente unitária, forme-se o operador³

$$\mathbf{T} = \sum_{g \in G} \mathbf{R}_g^\dagger \mathbf{R}_g$$

Para determinar a decomposição polar de $\mathbf{T} = \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}$ é necessário encontrar uma matriz unitária \mathbf{A} que diagonaliza \mathbf{T} , i.e. $\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^{-1}$. Esta matriz pode ser $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\text{DET}[\mathbf{E}]}} \mathbf{E}$ onde \mathbf{E} é a matriz⁴ cujas linhas são os vectores próprios de \mathbf{T} .

A matriz $\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{T}}^{1/2} \mathbf{A}$ é a "raiz quadrada"⁵ de \mathbf{T} no sentido que $\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{A}^\dagger \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{A} = \mathbf{T}$.

2 - $\text{Rep} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

3 - $\mathbf{T} = \text{Plus}@\text{@(Transpose[\#, \#])\&/@\text{Rep}} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A} = \frac{\#}{\sqrt{\text{Det}[\#]}} \&\text{@Eigensystem}[\mathbf{T}][[2]] \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 - $\text{Transpose}[\mathbf{A}].\mathbf{A} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \text{Inverse}[\mathbf{A}] \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

5 - $\mathbf{S} = \sqrt{\tilde{\mathbf{T}}}. \mathbf{A} \rightsquigarrow \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

A representação equivalente unitária pretendida é $U = S.R.S^{-1}$.⁶

$$U_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad U_{\lambda_1 \kappa_1 \lambda_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$U_{\kappa_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad U_{\kappa_1 \lambda_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad U_{\lambda_1 \kappa_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Para mostrar que é equivalente à que calculámos anteriormente basta notar que a conjugação de λ_1 por $\lambda_1 \kappa_1 \lambda_1$ transforma λ_1 em κ_1 , pelo que a matriz de equivalência deve ser

$$U_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e nesse caso obtemos a representação equivalente pretendida $\tilde{U} = U_3 U U_3^{-1}$.

VI – TEOREMA DE NEUMAN-PETER-WEYL

TEOREMA [4.21]

Se $f(g)$ é uma função sobre um grupo compacto G tal que $\|f\|_G^2 = \int_G |f(g)|^2 d\mu(g) < \infty$, então f pode ser expandida (no sentido da convergência forte em espaços de Hilbert) em termos das representações irredutíveis $U^{(p)}$ de G como

$$f(g) = \sum_{p \in Irr} \sum_{i,j=1}^{d_p} \hat{f}_i^j(p) u_j^{i(p)}(g)$$

onde os $\hat{f}_i^j(p)$ são constantes.

Grupo $U(1) \simeq S^1$ – O grupo formado por transformações g_θ dependentes de um parâmetro $\theta \in [0, 2\pi]$ e tal que $g_\theta g_{\theta'} = g_{\theta+\theta'}$, $g_{\theta+2\pi} = g_\theta$ é abeliano e tem representações irredutíveis unidimensionais inequivalentes $U^{(p)}_{g_\theta} = e^{i p \theta}$ com $p \in \mathbb{Z}$, i.e. $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A medida de Haar em S^1 é $d\mu(g_\theta) = d\theta$ e o grupo é compacto, donde o seu volume $\Omega = \int_{S^1} d\mu(g_\theta) = 2\pi$. As relações de ortogonalidade tomam a forma

$$\Omega \delta_{pq} = \int_{S^1} U^{(p)}_{g_\theta} U^{(q)}_{g_\theta^{-1}} d\mu(g_\theta) = \int_0^{2\pi} e^{i p \theta} e^{-i q \theta} d\theta = 2\pi \delta_{pq}$$

No caso de $G = S^1$, o teorema de Peter-Weyl é a decomposição em série de Fourier de uma função periódica

$$f(\theta) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{f}_p e^{i p \theta}$$

⁶ - MatrixForm/@(Unitary = ((S.#.Inverse[S])&/@Rep))

Grupo T_1 – Para alguns grupos não compactos o teorema de Peter-Weyl pode funcionar às vezes, mas as relações de ortogonalidade têm que ser generalizadas. Por exemplo, para o grupo de translações na recta real $G = T_1 \simeq (\mathbb{R}, +)$ as representações irredutíveis são $U_x^{(\lambda)} = e^{i\lambda x}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, e qualquer função de quadrado somável na recta \mathbb{R} pode expandir-se como uma transformada de Fourier

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

As relações de ortogonalidade são agora expressas em termos das funções- δ de Dirac como

$$\int_{\mathbb{R}} U_x^{(\lambda)} \overline{U_x^{(\lambda')}} dx = 2\pi \delta(\lambda - \lambda')$$

Grupo $SO(3, \mathbb{R})$ – No caso da componente conexa $G = SO(3, \mathbb{R})$ do grupo de rotações de \mathbb{R}^3 (grupo ortogonal $O(3, \mathbb{R})$): a condição de ortogonalidade por si só engloba também rotações "impróprias" que não pertencem a $SO(3, \mathbb{R})$, por exemplo as reflexões), cada rotação pode ser parametrizada por um vector $\varphi \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^3$ com $\varphi \in [-\pi, \pi]$, composto por um eixo de rotação $\hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi)$ e um ângulo de rotação φ em torno de $\hat{\mathbf{n}}$, i.e. um ponto da esfera de raio π centrada na origem. Pontos antipodais da superfície desta esfera representam a mesma rotação $\pm\pi \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi)$ (uma rotação de 180° no sentido directo ou retrógrado dá o mesmo resultado), enquanto $\varphi \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi)$ e $-\varphi \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi)$ correspondem a rotações em sentidos opostos.

O grupo $SO(3, \mathbb{R})$ é conexo mas não é simplesmente-conexo, porque o caminho fechado começando na identidade, indo até um ponto à superfície (i.e. uma rotação de 180°) com rotações em torno de um eixo fixo, depois usando rotações de 180° em torno de um eixo sucessivamente rodado até este apontar no sentido oposto e voltando à origem pelo caminho inverso (i.e. com rotações no sentido contrário às da primeira parte), a saber

$$(4-17) \quad \gamma : s \in [0, 2\pi] \rightarrow SO[3, \mathbb{R}] : \quad \gamma[s] = \begin{cases} 2s \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) & 0 \leq s < \frac{\pi}{2} \\ \pi \hat{\mathbf{n}}\left(\theta + s - \frac{\pi}{2}, \phi\right) & \frac{\pi}{2} \leq s \leq \frac{3\pi}{2} \\ -(2\pi - s) \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) & \frac{3\pi}{2} < s \leq 2\pi \end{cases}$$

não é continuamente contráctil para um ponto. (O caminho representado em (4-17) só é fechado devido à identificação dos pontos antipodais $\pi \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi) \equiv -\pi \hat{\mathbf{n}}(\theta, \phi)$. Não é possível deformar de forma contínua esta identificação para obter uma curva fechada que não toque a superfície). No espaço \mathbb{R}^3 , a aplicação destas transformações a um ponto inicial P resultam no seguinte comportamento: na primeira parte o ponto P descreve um círculo no sentido directo em torno do eixo $\hat{\mathbf{n}}$ e volta à posição inicial; a seguir o ponto P é sempre transformado no ponto P' que lhe é diametralmente oposto no círculo anterior à medida que o eixo $\hat{\mathbf{n}}$ roda até ao seu inverso $-\hat{\mathbf{n}}$; por fim o ponto P descreve um círculo no sentido inverso ao primeiro (rotação directa em torno de $-\hat{\mathbf{n}}$) e volta à posição inicial.

As representações irredutíveis são parametrizadas pelo valor da componente z do momento angular L_z . O operador Momento Angular L em coordenadas esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$

escreve-se

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_x &= i (\sin(\varphi)\partial_\theta + \cot(\theta)\cos(\varphi)\partial_\varphi) \\ \mathbb{L}_y &= -i (\cos(\varphi)\partial_\theta - \cot(\theta)\sin(\varphi)\partial_\varphi) \\ \mathbb{L}_z &= -i\partial_\varphi \\ \mathbb{L}^2 &= -\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)\partial_\theta) + \frac{1}{\sin(\theta)^2}\partial_{\varphi,\varphi}^2\right) \end{aligned}$$

e possui funções próprias $Y_l^m(\theta, \varphi)$ que verificam

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^2 Y_l^m(\theta, \varphi) &= l(l+1)Y_l^m(\theta, \varphi) \\ \mathbb{L}_z Y_l^m(\theta, \varphi) &= m Y_l^m(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

As funções Harmónicas Esféricas $Y_l^m(\theta, \varphi)$ são relacionadas com os polinómios de Legendre $P_l^m(\cos(\theta))$ através de

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+m+1)}} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi}$$

Assim, tendo em conta que o valor do momento angular total é $\mathbb{L}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle$ e $\mathbb{L}_z|j, m\rangle = m|j, m\rangle$ com $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$, para $g = \varphi \vec{n}(0, 0) \equiv \varphi e_z$, podemos escrever representações $\mathbf{U}_g^{(j)} = e^{i\varphi \mathbb{L}_z}$ onde

$$\chi^{(j)}(g) = \text{TR}[\mathbf{U}_g^{(j)}] = \sum_{m=-j}^j \langle j, m | e^{i\varphi \mathbb{L}_z} | j, m \rangle = \sum_{m=-j}^j e^{i\varphi m} = \frac{\sin\left[\left(j + \frac{1}{2}\right)\varphi\right]}{\sin\left[\frac{\varphi}{2}\right]}$$

Esta fórmula é válida para qualquer g já que existe sempre g' tal que $\mathbf{U}_{g'g}^{(j)} = e^{i\varphi \mathbb{L}_z}$ e $\text{TR}[\mathbf{U}_{g'}^{(j)} \mathbf{U}_g^{(j)} \overline{\mathbf{U}_{g'}^{(j)}}] = \text{TR}[e^{i\varphi \mathbb{L}_z}]$.

As relações de ortogonalidade contêm

$$\int_{-1}^1 \mathcal{P}_l(x) \mathcal{P}_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

para polinómios de Legendre com $l, l' \in \mathbb{N}$ e

$$\int_{S^2} Y_{lm}(\theta, \phi) \overline{Y_{l'm'}(\theta, \phi)} d\mu(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

para harmónicos esféricos com $m, m' = -l, -l+1, \dots, l-1, l$.

Pela realização de $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ como matrizes ortogonais \mathbf{R} , ou seja $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}_{n \times n}$ e $\text{DET}(\mathbf{R}) = +1$, pode-se mostrar que a dimensão deste conjunto de matrizes é

$$\text{DIM}[\text{SO}(n, \mathbb{R})] = n^2 - \left(\frac{n^2 - n}{2} + n\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

No caso $n = 3$ então $\text{DIM}[\text{SO}(3, \mathbb{R})] = 3$, e um sistema de coordenadas possível usa os três ângulos de Euler.

Grupo $SU(2, \mathbb{C})$ – O recobrimento simplesmente-conexo de $SO(3, \mathbb{R})$ é o grupo $SU(2, \mathbb{C}) \simeq S^3 \subset \mathbb{R}^4$ das matrizes complexas

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

com determinante unitário. Os elementos de $SU(2, \mathbb{C})$ podem ser parametrizados pelo ângulo de rotação θ em torno de um eixo $\mathbf{n}(\alpha, \beta) = \{\sin(\beta)\cos(\alpha), \sin(\beta)\sin(\alpha), \cos(\beta)\}$, pelo que obtemos uma representação spinorial usando

$$U = e^{-i\frac{\theta}{2}\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{1} - i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^i e_i$, com σ^i as matrizes de Pauli, $\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

4.7 Extensão de Representações

O conhecimento de representações de sub-grupos de um grupo G permite deduzir representações de G . Iremos estudar dois processos para o fazer: o "**LEVANTAMENTO**" a G de uma representação do sub-grupo G/N , quociente de G por um sub-grupo normal N , e a "**INDUÇÃO**" de uma representação de G pela de um sub-grupo qualquer $H \subset G$. Muito frequentemente H será abeliano, caso em que as representações irreduzíveis de H são os seus caracteres.

I – LEVANTAMENTO DE REPRESENTAÇÕES

DEFINIÇÃO [4.22]

Dado um **SUB-GRUPO** normal N de G , se $R_o : G/N \rightarrow \text{AUT}[V]$ fôr uma representação de G/N , então

$$\begin{aligned} \mathbf{R} : G &\rightarrow \text{AUT}[V] \\ g &\mapsto \mathbf{R}_g = \mathbf{R}_o[Ng] \end{aligned}$$

é uma representação de G , dita **LEVANTADA** de R_o .

- A representação **LEVANTADA** de R_o é irreduzível se R_o o fôr.
- O caracter da representação \mathbf{R} diz-se **LEVANTADO** de χ_o e tem-se

$$\chi(g) = \text{TR}[\mathbf{R}_g] = \text{TR}[\mathbf{R}_o[Ng]] = \chi_o(Ng)$$

- Recíprocamente, se $\mathbf{R} : G \rightarrow \text{AUT}[V]$ é uma representação de G com caracter χ , então os elementos $n \in \text{KER}[\mathbf{R}]$, i.e. verificando $\chi(n) = \chi(e) = \text{DIM}[V]$ formam um sub-grupo normal N de G , e $\mathbf{R}_o[Ng] = \mathbf{R}_g$ é a representação de G/N de que \mathbf{R} é **LEVANTADA**.

II – REPRESENTAÇÕES INDUZIDAS POR SUB-GRUPOS

Seja G um grupo finito e $H \subset G$ um sub-grupo de índice $[G : H] = n = \frac{\#G}{\#H}$. Dada uma representação \tilde{U}^H de H com suporte num espaço vectorial V de dimensão d , podemos estender \tilde{U}^H para um mapa em todo o G

$$\mathbf{U}^H : G \rightarrow \text{AUT}(V)$$

$$g \mapsto \mathbf{U}_g^H = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{se } g \notin H \\ \tilde{\mathbf{U}}_g^H & \text{se } g \in H \end{cases}$$

Escolhido um conjunto **TRANSVERSAL** qualquer $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ em G/H , deve ter-se $G = \bigcup_{i=1}^n H t_i$. Então

DEFINIÇÃO [4.23]

$$\mathbf{U}_g^G = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{t_1 g t_1^{-1}}^H & \mathbf{U}_{t_1 g t_2^{-1}}^H & \dots & \mathbf{U}_{t_1 g t_n^{-1}}^H \\ \mathbf{U}_{t_2 g t_1^{-1}}^H & \mathbf{U}_{t_2 g t_2^{-1}}^H & \dots & \mathbf{U}_{t_2 g t_n^{-1}}^H \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{U}_{t_n g t_1^{-1}}^H & \mathbf{U}_{t_n g t_2^{-1}}^H & \dots & \mathbf{U}_{t_n g t_n^{-1}}^H \end{pmatrix}$$

As matrizes \mathbf{U}_g^G verificam as condições para uma **REPRESENTAÇÃO DE G INDUZIDA** pela de H , i.e.

$$\forall g, g' \in G \quad \begin{cases} \mathbf{U}_g^G \mathbf{U}_{g'}^G = \mathbf{U}_{gg'}^G \\ \mathbf{U}_e^G = \mathbf{1} \end{cases}$$

- Esta representação não depende da escolha feita para o transversal $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$
- O **CARACTER INDUZIDO** χ^G é o caracter desta representação, e pode escrever-se

$$\chi^G(g) = \text{TR}[\mathbf{U}_g^G] = \sum_{i=1}^n \chi^H(t_i g t_i^{-1})$$

DEMONSTRAÇÃO

(i) – Caso $g = e$:

Os blocos diagonais de \mathbf{U}_e^G são todos $(\mathbf{U}_e^G)_{ii} = \mathbf{U}_{t_i e t_i^{-1}}^H = \mathbf{1}$, enquanto que os blocos não diagonais têm de ser nulos porque $t_i t_j^{-1} \notin H$, e portanto $(\mathbf{U}_e^G)_{ij} = \mathbf{U}_{t_i e t_j^{-1}}^H = \mathbf{0}$. De facto, se $t_i t_j^{-1} \in H$, então $t_i \in H t_j$, o que não pode ser já que os t_i formam um conjunto **TRANSVERSAL** de G .

(ii) – Caso $g \neq e$:

Se $t_i g t_j^{-1} \notin H$ então, qualquer que seja o t_r , uma das afirmações $t_i g t_r^{-1} \notin H$ ou $t_r g t_j^{-1} \notin H$ é verdadeira, porque se ambos pertencessem a H , teríamos $t_i g t_r^{-1} t_r g t_j^{-1} = t_i g g t_j^{-1} \in H$, em contradição com o pressuposto. Portanto,

$$(\mathbf{U}_{gg'}^G)_{ij} = \mathbf{0} = \sum_{r=1}^n \mathbf{U}_{t_i g t_r^{-1}}^H \mathbf{U}_{t_r g' t_j^{-1}}^H = (\mathbf{U}_g^G \mathbf{U}_{g'}^G)_{ij}$$

Se $t_i g t_j^{-1} \in H$ por outro lado, existe um t_s tal que $t_i g \in H t_s$. Mas então $t_s g' t_j^{-1} = (t_i g t_s^{-1})^{-1} (t_i g g' t_j^{-1}) \in H$ e portanto

(4-18)
$$(\mathbf{U}_{gg'}^G)_{ij} = \mathbf{U}_{t_i g g' t_j^{-1}}^H = \mathbf{U}_{t_i g t_s^{-1}}^H \mathbf{U}_{t_s g' t_j^{-1}}^H$$

Mas como $t_i g t_r^{-1} \notin H$ se $r \neq s$, $\mathbf{U}_{t_i g t_r^{-1}}^H = \mathbf{0}$ e o último termo de **(4-18)** pode reescrever-se como um somatório (no qual todos os termos excepto o de $r = s$ são nulos)

$$(\mathbf{U}_{gg'}^G)_{ij} = \sum_{r=1}^n \mathbf{U}_{t_i g t_r^{-1}}^H \mathbf{U}_{t_r g' t_j^{-1}}^H = (\mathbf{U}_g^G \mathbf{U}_{g'}^G)_{ij} \quad \blacksquare$$

4.8 Exercícios

EXERCÍCIO [4.1]

Dado um grupo G , o seu **GRUPO DERIVADO** ou **COMUTADOR** G' é o grupo gerado pelos elementos

$$[x, y] := xy(yx)^{-1} \quad ; \quad \forall x, y \in G$$

Mostre que:

- (I) G' é normal em G ;
- (II) G/G' é abeliano (de facto, o menor sub-grupo abeliano normal de G);
- (III) Todos os caracteres lineares de G se obtêm por "LEVANTAMENTO" dos caracteres de G/G'
- (IV) Se χ_λ for um caracter linear de G , então $\chi_\lambda \chi^{(i)}$ é também um caracter simples se $\chi^{(i)}$ o for.

EXERCÍCIO [4.2]

Seja G o **GRUPO DICÍCLICO** de ordem 12 gerado por dois símbolos $\{a, b\}$ e definido pelas relações

$$a^6 = 1 \quad a^3 = (ab)^2 = b^2$$

Determine o seu grupo derivado G' e o seu centro Z . Usando os resultados anteriores, construa a tabela de caracteres de G .

EXERCÍCIO [4.3]

I – ÁLGEBRA DE CLIFFORD-DIRAC

A álgebra de **CLIFFORD-DIRAC** de dimensão n é formada por "*matrizes*" que verificam

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n)$$

A partir desta álgebra é possível definir um grupo finito G adicionando aos seus geradores x os respectivos simétricos $\bar{x} = -x$.

- (I) Para $n = 4$, esta é uma álgebra 16-dimensional (mostre-o exibindo uma base !). Mostre que G é um grupo finito de ordem 32, e determine a dimensão de todas as suas representações irredutíveis.
- (II) Mostre que quando $n = 2m = \text{par}$, existe só uma representação irredutível de dimensão $d_p = 2^m$.
- (III) Mostre que quando $n = 2m + 1 = \text{ímpar}$, existem exactamente duas representações irredutíveis inequivalentes de dimensão $d_p = 2^m$.

[NOTA] A extensão da álgebra para grupo faz-se considerando apenas a estrutura de produto e adicionando 'novos' geradores $\bar{1} = -1$; $\bar{\gamma}_\mu = -\gamma_\mu$ aos existentes. O grupo assim obtido tem que admitir representações unidimensionais, mas essas não podem ser representações da álgebra porque verificam $\mathbf{U}(\bar{x}) = \mathbf{U}(x)$ quando na álgebra se pretende $\mathbf{U}(\bar{x}) = -\mathbf{U}(x)$.

SOLUÇÃO 4-3

Para obter as representações desta álgebra por métodos de teoria de grupos, construímos o grupo associado definindo os elementos $\bar{\gamma}_\mu = -\gamma_\mu$, $\bar{1} = -1$, e gerando o grupo

$$G = \left\{ 1, \bar{1}, \gamma_\mu, \bar{\gamma}_\mu, \underset{(\mu < \nu)}{\gamma_\mu \gamma_\nu}, \underset{(\mu < \nu)}{\bar{\gamma}_\mu \bar{\gamma}_\nu}, \underset{(\mu < \nu < \lambda)}{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda}, \dots \right\}.$$

Note em primeiro lugar que
$$\begin{cases} \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu & \text{se } \mu \neq \nu \\ \gamma_\mu^2 = 1 \end{cases}$$

O operador $\Gamma = \prod_{\mu=1}^n \gamma_\mu$ verifica
$$\begin{cases} \gamma_\mu \Gamma = (-1)^{n-1} \Gamma \gamma_\mu & (\mu = 1, 2, \dots, n) \\ \gamma_n \Gamma = (-1)^{n-1} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1} \\ \Gamma^2 = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+2+1} \mathbf{1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathbf{1} \end{cases}$$

[$n = 2m + 1$ ÍMPAR]

Neste caso $(-1)^{n-1} = 1$ pelo que, se $\mathbf{U}^{(i)}$ designar uma representação irredutível,

$$\mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu) \mathbf{U}^{(i)}(\Gamma) = \mathbf{U}^{(i)}(\Gamma) \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu) \implies \mathbf{U}^{(i)}(\Gamma) = \lambda \mathbf{1}$$

Mas

$$\mathbf{U}^{(i)}(\Gamma^2) = \lambda^2 \mathbf{1} = (-1)^{m(2m+1)} \mathbf{1} \implies \lambda^2 = (-1)^m \implies \begin{cases} \lambda = \pm 1 & \text{se } n = 4l + 1 \\ \lambda = \pm i & \text{se } n = 4l + 3 \end{cases}$$

Como

$$\mathbf{U}^{(i)}(\gamma_n \Gamma) = (-1)^{2m} \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) \implies \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_n) = \lambda^{-1} \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1})$$

vemos que em qualquer representação irredutível da $(2m + 1)$ -álgebra de Clifford-Dirac a representação do n -ésimo gerador γ_n depende das representações dos restante $n - 1$ geradores, e assim resta-nos considerar em pormenor as representações irredutíveis para o caso par $n = 2m$. Contudo, vamos adiantando que, se $\mathbf{U}_\pm^{(i)}$ for uma representação irredutível da $(2m + 1)$ -álgebra de Clifford-Dirac então

$$\mathbf{U}_\pm^{(i)}(\gamma_n) = \pm \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) \implies \mathbf{U}_+^{(i)} \simeq \mathbf{U}_-^{(i)}$$

De facto, para qualquer $\mu = 1, \dots, n$, tem-se $\gamma_\mu^2 = 1$ e

$$\gamma_\mu (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) = (-1)^{n-2} (\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) \gamma_\mu$$

pele que, como $n - 2 = 2m - 1$ é ímpar, se obtém

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_n) &= -\mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) = -\mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu^2) \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) \\ &= -(-1)^{n-2} \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu) \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu) = \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu) \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_n) \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu)^{-1} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}) \neq i \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1})$$

e existem assim duas representações irredutíveis inequivalentes para cada representação $\mathbf{U}^{(i)}$ da $(2m)$ -álgebra.

[$n = 2m$ PAR]

Neste caso,

$$(4-19) \quad \Gamma \gamma_\mu = -\gamma_\mu \Gamma \implies \mathbf{U}^{(i)}(\Gamma) \mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu) = -\mathbf{U}^{(i)}(\gamma_\mu) \mathbf{U}^{(i)}(\Gamma)$$

pele que $\mathbf{U}^{(i)}(\Gamma) \neq \lambda \mathbf{1}$. Seja

$$x_A \in \left\{ \mathbf{1}, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_\nu, \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda, \dots, \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_n \right\} \quad ; \quad A = 1, \dots, N = 2^n$$

Se $\mathbf{U}^{(i)}$ e $\mathbf{U}^{(j)}$ designarem duas representações irredutíveis, então das relações de ortogonalidade teremos

$$(4-20) \quad \frac{1}{N} \sum_{A=1}^N \bar{\chi}^{(i)}(x_A) \chi^{(j)}(x_A) = \delta^{ij}$$

Contudo, de (4-20) pode-se mostrar que, para todo o $x_A \neq \mathbf{1}$ existe x_B tal que que $x_B x_A x_B^{-1} = -x_A$, ou seja

$$\text{TR} [\mathbf{U}^{(i)}(x_A)] = \text{TR} [\mathbf{U}^{(i)}(x_B x_A x_B^{-1})] = -\text{TR} [\mathbf{U}^{(i)}(x_A)] \quad \forall i = 1, \dots, p$$

pele que

$$\chi^{(i)}(x_A) = \text{TR} [\mathbf{U}^{(i)}(x_A)] = \begin{cases} d_i & \text{se } x_A = \mathbf{1} \\ 0 & \text{se } x_A \neq \mathbf{1} \end{cases}$$

As relações (4-20) reduzem-se pois a

$$\frac{1}{N} d_i d_j = \delta^{ij} \implies i = j \quad \& \quad d_i = \sqrt{2^n} = 2^m$$

mostrando-se assim que existe uma só representação irredutível de uma álgebra de Clifford-Dirac de $2m$ geradores.

EXERCÍCIO [4.4]

Mostre que, se H é um sub-grupo de G com índice n , e χ um caracter de H , então o caracter de χ^G INDUZIDO por χ_H em G é determinado pelos seus valores nas classes de conjugação C_α :

$$\chi_H^G(C_\alpha) = \frac{n}{c_\alpha} \sum_{g \in C_\alpha \cap H} \chi_H(g)$$

onde $c_\alpha = \#C_\alpha$.

SOLUÇÃO 4-4

Dado o caracter $\chi_H : H \rightarrow \mathbb{C}$ do sub-grupo $H \subset G$ de índice $n = \frac{|G|}{|H|}$, vê-se pela definição da representação induzida que o seu caracter será

$$\begin{aligned}\chi_H^G(x) &= \sum_{i=1}^n \chi_H(t_i x t_i^{-1}) = \sum_{i=1}^n \chi_H(h t_i x t_i^{-1} h^{-1}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \sum_{i=1}^n \chi_H(h t_i x t_i^{-1} h^{-1}) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \chi_H(g x g^{-1})\end{aligned}$$

Agora suponhamos que $x \in C_\alpha \subset G$. Então

LaTeXError: Command invalid in math mode. See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Please define a new math symbol.

$$\chi_H^G(x) = \chi_H^G(C_\alpha) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G} \chi_H(g x g^{-1})$$

Mas os elementos $g x g^{-1}$ não são todos distintos quando g percorre G . De facto,

$$g x g^{-1} = g' x g'^{-1} \iff g^{-1} g' \in Z_x = \{z \in G : z x = x z\}$$

Assim, quando g percorre G , $g x g^{-1} \in C_\alpha$ passa $|Z_x|$ vezes por qualquer elemento $y \in C_\alpha$, pelo que se deve ter

$$\frac{|G|}{|C_\alpha|} = |Z_x| = \frac{n |H|}{c_\alpha}$$

Podemos agora transformar a soma em (4-21) numa soma sobre os **CO-CONJUNTOS** $[g] = g Z_x \in G/Z_x$

$$\chi_H^G(x) = \frac{|Z_x|}{|H|} \sum_{[g] \in G/Z_x} \chi_H([g] x [g]^{-1}) = \frac{n}{c_\alpha} \sum_{y \in C_\alpha \cap H} \chi_H(y)$$

(note que $\chi_H(y) = 0$ se $y \notin H$).

Falta-nos ver que esta fórmula não depende do elemento $x \in C_\alpha$ escolhido. De facto, se $x = \tilde{g}^{-1} y \tilde{g}$, então

$$g(\tilde{g}^{-1} y \tilde{g})g^{-1} = g'(\tilde{g}^{-1} y \tilde{g})g'^{-1} \implies \tilde{g}(g^{-1} g')\tilde{g}^{-1} y = y \tilde{g}(g^{-1} g')\tilde{g}^{-1}$$

ou seja

$$Z_y = \tilde{g} Z_x \tilde{g}^{-1}$$

pelo que $|Z_y| = |Z_x|$.

EXERCÍCIO [4.5]

II – GRUPO SIMÉTRICO ALTERNANTE A_4

Determine a tabela de caracteres do grupo A_4 das permutações **PARES** de 4 objectos. A partir daí, determine todas as representações irreduzíveis de A_4 .

As classes de conjugação para A_4 são

$$\begin{aligned} C_1 &= \{e\} \\ C_2 &= \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \\ C_3 &= \{(1)(234), (2)(143), (3)(124), (4)(132)\} \\ C_4 &= \{(1)(243), (2)(134), (3)(142), (4)(123)\} \end{aligned}$$

A respectiva tabela de caracteres resulta da observação de que $N_4 = C_1 \oplus C_2$ é um sub-grupo normal de A_4 , pelo que, para os caracteres lineares, se deve ter $\chi_2^{(i)} = 1$. Ainda para o caso linear, os elementos das classes 3 e 4 são cíclicos de ordem 3, pelo que se deve ter

$$|\chi_3^{(i)}|^3 = |\chi_4^{(i)}|^3 = 1$$

pelo que

$$\chi_3^{(i)} = 1, e^{\frac{2\pi}{3}i} \text{ ou } e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

e o mesmo para $\chi_4^{(i)}$. Usando o teorema de Burnside podemos verificar que apenas pode haver uma decomposição $12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$, donde a única representação não linear deve ter dimensão $d_4 = 3$. Da identidade $1 + \omega + \omega^2 = 0$, com $\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, concluímos, usando relações de ortogonalidade de 2ª espécie nas classes C_3 e C_4 , que $\chi_3^{(4)} = \chi_4^{(4)} = 0$, e das relações de ortogonalidade de 1ª espécie que $\chi_2^{(4)} = -1$. A tabela de caracteres de A_4 será então

A_4	C_1 ($c_1=1$)	C_2 ($c_2=3$)	C_3 ($c_3=4$)	C_4 ($c_4=4$)
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	ω	ω^2
$\chi^{(3)}$	1	1	ω^2	ω
$\chi^{(4)}$	3	-1	0	0

4.9 Problemas da Parte III

PROBLEMA III-1: REPRESENTAÇÃO REDUTÍVEL

- I. Seja $\mathbf{R} : G \rightarrow \text{AUT}(\mathbb{Q}^2)$ uma representação de grau 2 sobre o corpo \mathbb{Q} dos racionais com a propriedade de ser $\mathbf{R}_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ para um elemento $g \in C_G$ do centro de G . Mostre que \mathbf{R} é redutível.

PROBLEMA III-2: REPRESENTAÇÃO NATURAL DE GRUPO DE PERMUTAÇÕES

- I. Seja $V = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ um espaço vectorial de dimensão m . Mostre que V é naturalmente suporte de uma representação de qualquer grupo de permutações G de grau m através da correspondência

$$R_\sigma v_i = v_{\sigma[i]}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- II. Mostre que o espaço vectorial $U = \langle u_1, u_2, \dots, u_{m-1} \rangle$ onde $u_i = v_i - v_m$ é um G -módulo de dimensão $m - 1$.

- III. Quando $m = 4$, calcule as matrizes que representam a acção de

$$\tau = (12) \quad \rho = (123) \quad \lambda = (12)(34) \quad \gamma = (1234)$$

em U e determine os seus caracteres.

PROBLEMA III-3: CARACTER INDUZIDO POR SUB-GRUPO

- I. Mostre que, se H é um sub-grupo de G com índice n , e χ um caracter de H , então o caracter χ^G induzido por χ em G é determinado pelos seus valores nas classes de conjugação C_α de G através da fórmula

$$\chi_\alpha^G = \frac{n}{\#C_\alpha} \sum_{g \in C_\alpha \cap H} \chi[g]$$

PROBLEMA III-4: CARACTERES DO GRUPO DE PERMUTAÇÕES \mathcal{A}_4

- I. Determine, a partir das relações de ortogonalidade apropriadas, a tabela de caracteres do grupo \mathcal{A}_4 das permutações pares de 4 objectos. A partir desta tabela determine todas as representações irreduzíveis de \mathcal{A}_4 .

PROBLEMA III-5: CARACTERES LINEARES E LEVANTAMENTO DE CARACTERS

- I. Dado um grupo G , e designando por G' o seu grupo derivado ou comutador, mostre que G/G' é o menor sub-grupo abeliano normal de G e que todos os caracteres lineares de G se obtêm por "levantamento" dos caracteres de G/G' .
- II. Se λ for um caracter linear de G , então $\lambda\chi$ é um caracter simples sempre que χ o seja. (Os caracteres de representações irreduzíveis designam-se "simples".)

PROBLEMA III-6: GRUPO DICÍCLICO

I. Se G é o grupo dicíclico de ordem 12 gerado por dois símbolos a, b e as relações

$$a^6 = 1 \quad ; \quad a^3 = (ab)^2 = b^2,$$

determine o seu grupo derivado G' e o seu centro Z . Usando os resultados do **PROBLEMA 5**, construa a tabela de caracteres de G .

PARTE IV

GRUPOS INFINITOS

CAPÍTULO 5

GRUPOS CONTÍNUOS

Contents

5.1 Grupos Topológicos	122
Topologia	122
Carta Local	123
Funções de Transição	124
Variedade Topológica	124
Grupo Topológico	124
5.2 Grupos de Lie	125
Diferenciabilidade	125
Grupo de Lie	125
Grupos e Álgebras de Lie Clássicos	125
Grupo Ortogonal $G = O_2(\mathbb{R})$	126
Grupo Unitário especial $G = SU_2(\mathbb{C})$	127
Álgebra de Lie $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$	127
Grupo $G = SO_3(\mathbb{R})$	128
5.3 Os grupos $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$.	129
O grupo de Möbius \check{M}	129
projecção Estereográfica e $SU_2(\mathbb{C})$	130
Rotações e Ângulos de Euler	131
5.4 O grupo $SO_3(\mathbb{R})$ de rotações em \mathbb{R}^3.	133
Representação induzida por $SU_2(\mathbb{C})$	136
5.5 Representações Irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$	137
Raízes e Forma Canónica de Relações de Comutação	138
Constantes de Estrutura e Representação Regular de álgebra	138

5.1 Grupos Topológicos

I – TOPOLOGIA

DEFINIÇÃO [5.1]

Dotar um espaço M duma **TOPOLOGIA** significa escolher uma colecção \mathcal{T}_M de subconjuntos $O \subset M$, designados **ABERTOS** de M , de forma que:

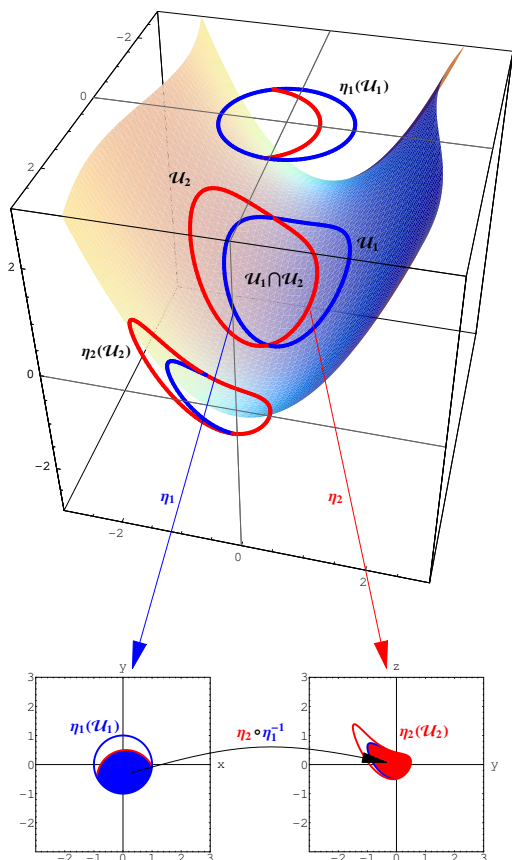
- i. O próprio M e o conjunto vazio \emptyset pertencem a \mathcal{T}_M , i.e. são abertos;
- ii. Qualquer **INTERSECÇÃO** dum número **FINITO** de abertos é um aberto;
- iii. Qualquer **UNIÃO** dum número **FINITO OU INFINITO** de abertos é um aberto.

Uma **BASE** para a topologia de M é uma sub-colecção $\mathcal{B}_T \subseteq \mathcal{T}_M$ de abertos tal que qualquer aberto $O \in \mathcal{T}_M$ se pode obter como uma união $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ de abertos $O_i \in \mathcal{B}_T$.

Se $Q \subset M$ for um sub-conjunto de um espaço topológico M , uma topologia possível \mathcal{T}_Q sobre Q é a **TOPOLOGIA DE SUB-CONJUNTO** (i.e. a topologia cujos abertos $\mathcal{U} = Q \cap O$ são as intersecções de Q com os abertos $O \in \mathcal{T}_M$ da topologia de M). Por outro lado, Q nem sempre é definido como um sub-conjunto doutro espaço topológico, e mesmo quando o é, a topologia de sub-conjunto pode não ser a mais útil ou a que nos interesse mais definir sobre Q . Duas restrições que devemos fazer às estruturas topológicas admissíveis (por razões técnicas futuramente justificáveis) são as seguintes:

[HAUSDORF] Um espaço topológico M diz-se Hausdorff se e só se, para todo o par de pontos distintos $m \neq m' \in M$, existem dois abertos disjuntos $O \cap O' = \emptyset$ tais que $m \in O$ e $m' \in O'$. A condição de Hausdorff é por si só **SUFICIENTE** para garantir a unicidade de solução para equações diferenciais em M .

[SEPARÁVEL] Um espaço topológico M diz-se **SEPARÁVEL** (“second countable”, “separable”) se possui uma base de topologia **NUMERÁVEL**. Separabilidade e Hausdorff são, em conjunto, condição **SUFICIENTE** para garantir a existência de **PARTIÇÕES DA UNIDADE**, que por sua vez são necessárias para a construção de estruturas geométricas importantes, como seja toda a teoria de integração em variedades, estruturas Riemannianas, métricas, etc.



Um conjunto M tem **DIMENSÃO** n se existirem injeções $\eta_\alpha : \mathcal{U}_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (i.e. aplicações η_α para as quais $\eta_\alpha(m) = \eta_\alpha(m') \implies m \equiv m'$) que estabelecem a correspondência “ponto $m \in \mathcal{U}_\alpha$ ” \leftrightarrow “ n parâmetros reais”, estando cada uma delas possivelmente definida apenas num sub-conjunto $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ (o ‘**DOMÍNIO**’ de η_α), mas de forma que $M = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{U}_\alpha$.

Note que o conjunto de pares $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ é enorme, e que o conjunto I dos índices α é certamente não-numerável.

Assim, o que se propõe é o seguinte: dado que existe uma topologia ‘standard’ em \mathbb{R}^n , e dado que M pode ser ‘**COBERTO**’ pela união de sub-conjuntos \mathcal{U}_α em correspondência bijectiva com um sub-conjunto $\eta_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, vamos **INDUZIR** uma topologia em M que resulte em chamar **ABERTOS** aos domínios \mathcal{U}_α e **CONTÍNUAS** às injeções η_α . Por isso é que, de todos os pares $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ possíveis, vamos restringir-nos àqueles em que a imagem $\eta_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ é um **ABERTO** na topologia normal em \mathbb{R}^n . Esta regra está na origem da seguinte definição:

II – CARTA LOCAL

DEFINIÇÃO [5.2]

Uma **CARTA LOCAL** num espaço M é um par (\mathcal{U}, η) formado por um sub-conjunto $\mathcal{U} \subset M$ e uma aplicação $\eta : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ que estabelece uma correspondência **BIJECTIVA** entre \mathcal{U} e um **ABERTO** $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$.

Escolhida uma base de \mathbb{R}^n , as componentes $\eta^i \in \mathcal{F}_{\mathcal{U}}(\mathbb{R})$ de $\eta = (\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^n)$ formam um **SISTEMA DE COORDENADAS LOCAIS** associado.

Mas, por definição de topologia, a intersecção de um número finito de abertos deve ser um aberto. Assim, se queremos designar os domínios \mathcal{U}_α de **ABERTOS** numa topologia de M , temos que exigir também, de acordo com (ii), que a imagem numa intersecção não-vazia de um número finito de domínios \mathcal{U}_α seja um aberto de \mathbb{R}^n . A partir daqui, os pares $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ que verificam estas condições vão-se dividir em colecções $\mathcal{A}_M = \{(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)\}$ distintas, designadas **ATLAS** sobre M , para cada uma das quais é verdade que

$$\mathcal{W} = \mathcal{U}_{\alpha_1} \cap \mathcal{U}_{\alpha_2} \dots \cap \mathcal{U}_{\alpha_k} \neq \emptyset \implies \eta_{\alpha_r}(\mathcal{W}) \text{ é aberto em } \mathbb{R}^n ; \forall \alpha_r \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$$

Esta importante condição pode ser reformulada de forma mais conveniente usando o conceito de **FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO**:

III – FUNÇÕES DE TRANSIÇÃO

DEFINIÇÃO [5.3]

Numa colecção de cartas locais \mathcal{A}_M , dados dois quaisquer $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha), (\mathcal{U}_\beta, \eta_\beta) \in \mathcal{A}_M$ tais que $\mathcal{U}_{\alpha\beta} = \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$, a **FUNÇÃO DE TRANSIÇÃO** $\zeta_{\alpha\beta} \doteq \eta_\beta \circ \eta_\alpha^{-1}$ é uma **BIJEÇÃO CONTÍNUA DE INVERSO CONTÍNUO**, i.e. um **HOMEOMORFISMO**

$$\zeta_{\alpha\beta} : \eta_\alpha(\mathcal{U}_{\alpha\beta}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \eta_\beta(\mathcal{U}_{\alpha\beta}) \subset \mathbb{R}^n$$

De acordo com esta condição, todo o par (\mathcal{U}, η) , onde $\mathcal{U} = \eta_\alpha^{-1}(\mathcal{O})$, $\eta = [\eta_\alpha]_{\mathcal{U}}$ e $\mathcal{O} \subset \eta_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)$ um aberto de \mathbb{R}^n , faz parte das mesmas colecções que $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$. Podemos assim garantir que, numa colecção de cartas \mathcal{A}_M cujas funções de transição estejam nas condições acima, o conjunto dos domínios \mathcal{U}_α forma uma **BASE DE TOPOLOGIA** de M , e que nessa topologia as injecções η_α são **BIJECTIVAS**(i.e. homeomorfismos sobre os respectivos contradomínios).

IV – VARIEDADE TOPOLÓGICA

DEFINIÇÃO [5.4]

Dotar M duma estrutura de **VARIEDADE TOPOLÓGICA** consiste em associar-lhe um **ATLAS COMPLETO** \mathcal{A}_M cuja colecção de **CARTAS LOCAIS** $(\mathcal{U}_\alpha, \eta_\alpha)$ verificam as condições da **DEFINIÇÃO [5.3]**.

V – GRUPO TOPOLÓGICO

DEFINIÇÃO [5.5]

Um grupo G dotado de uma topologia \mathcal{T}_G para a qual o produto no grupo e a inversão dum elemento do grupo sejam contínuas designa-se um **GRUPO TOPOLÓGICO**.

- Um grupo topológico diz-se **SEPARÁVEL** se existir uma **BASE NUMERÁVEL** para os conjuntos abertos.

– Um grupo topológico diz-se **LOCALMENTE COMPACTO**(L.C.) se cada ponto tem uma vizinhança compacta, ou se contém um **ABERTO** cujo fecho é **COMPACTO**. Por Exemplo:

[L.C.]– Os grupos $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SO(3, \mathbb{R})$ (compacto), $SL(2, \mathbb{C})$ são **LOCALMENTE COMPACTOS**

[**NÃO** L.C.]– Os grupos de dimensão infinita, como o grupo de transformações de Gauge da Electrodinâmica Quântica : $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi$, as quais deixam invariantes os campos $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ **NÃO SÃO LOCALMENTE COMPACTOS**.

5.2 Grupos de Lie

I – DIFERENCIABILIDADE

A possibilidade de definir um conceito de **FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL** sobre M leva-nos a mais uma restrição na definição dos atlas \mathcal{A}_M^0 . Uma vez mais, a possibilidade de identificar localmente M com \mathbb{R}^n vai-nos permitir utilizar a estrutura euclideana de \mathbb{R}^n para induzir sobre M noções que dependem necessariamente da existência de um conceito de **DISTÂNCIA**, como por exemplo o de **DERIVADA** de uma aplicação. Assim, vamos considerar que, num ponto $m \in M$ coberto por uma carta local (\mathcal{U}, η) , uma dada função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $f \circ \eta^{-1} : \eta(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável de classe C^r em m .

$$(5-1) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{U} \subset M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \eta \downarrow & \nearrow f \circ \eta^{-1} \in C^r_{\eta(\mathcal{U})}(\mathbb{R}) & \\ \eta(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Nítidamente esta condição depende da carta local que se escolhe em \mathcal{A}_M^0 para cobrir m . Contudo, é possível **POR VEZES** encontrar sub-coleções \mathcal{A}_M^r cujas cartas cobrem M de forma que (5-1) se verifique para quaisquer $(\mathcal{U}_i, \eta_i) \in \mathcal{A}_M^r$ e $f \in \mathcal{F}_M(\mathbb{R})$.

Dado que na intersecção de domínios $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ se tem $f \circ \eta_j^{-1} = (f \circ \eta_i^{-1}) \circ (\eta_i \circ \eta_j^{-1})$ isso é equivalente a impôr que $\eta_i \circ \eta_j^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja de classe C^r para todos os pares $(\mathcal{U}_i, \eta_i), (\mathcal{U}_j, \eta_j) \in \mathcal{A}_M^r$ que tenham $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$.

II – GRUPO DE LIE

DEFINIÇÃO [5.6]

Um grupo G diz-se um **GRUPO DE LIE** se tiver uma estrutura de variedade analítica \mathcal{A}_G^0 compatível com a do grupo, i.e. o mapa $\mathcal{R} : G \times G \rightarrow G$ definido por $\mathcal{R}(g, g') = g'g^{-1}$ é analítico.

III – GRUPOS E ÁLGBRAS DE LIE CLÁSSICOS

Os grupos de simetria clássicos agrupam-se em três classes básicas distintas:

[ORTOGONAL] – grupos que preservam métricas reais = formas bilineares simétricas

$$\text{Algebras } \mathfrak{B}_n = \mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{R}) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{D}_n = \mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{R})$$

[UNITÁRIA] – grupos que preservam métricas complexas = formas bilineares hermíticas

$$\text{Algebras } \mathfrak{B}_n = \mathfrak{so}_{2m+1}(\mathbb{C}) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{D}_n = \mathfrak{so}_{2m}(\mathbb{C})$$

[SIMPLÉTICA] – grupos que preservam estrutura complexa \Leftarrow formas bilineares anti-simétricas

$$\text{Álgebras } \mathfrak{C}_n = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$$

Variações dentro de cada classe resumem-se a diferentes condições de realidade sobre os parâmetros da álgebra de Lie.

Grupo de Lie	Álgebra de Lie	C-Dim	R-Dim
$GL_n(\mathbb{F}) = \{T \in M_{n \times n} \simeq \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^{n*} : \det[T] \neq 0\}$	$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_{n \times n} \simeq \mathbb{F}^n \otimes \mathbb{F}^{n*}\}$	n^2	$2n^2$
$SL_n(\mathbb{F}) = \{T \in GL_n(\mathbb{F}) : \det[T] = 1\}$	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : \text{Tr}[A] = 0\}$	$n^2 - 1$	$2n^2 - 2$
$O_n(\mathbb{F}) = \{T \in GL_n(\mathbb{F}) : T^T = T^{-1}\}$	$\mathfrak{o}_n(\mathbb{F}) \equiv \mathfrak{so}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : A^T = -A\}$	$\frac{1}{2}(n^2 - n)$	$n^2 - n$
$SO_n(\mathbb{F}) = \{T \in O_n(\mathbb{F}) : \det[T] = 1\}$	$\mathfrak{so}_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : A^T = -A \Rightarrow \text{TR}[A] = 0\}$	$\frac{1}{2}(n^2 - n)$	$n^2 - n$
$U_n(\mathbb{C}) = \{T \in GL_n(\mathbb{C}) : T^\dagger = T^{-1}\}$	$\mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A^\dagger = -A\}$	n^2	--
$SU_n(\mathbb{C}) = \{T \in U_n(\mathbb{C}) : \det[T] = 1\}$	$\mathfrak{su}_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{u}_n(\mathbb{C}) : \text{TR}[A] = 0\}$	$n^2 - 1$	--
$Sp_{n/2}(\mathbb{F}) = \{T \in GL_n(\mathbb{F}) : T^T J T = J\}$	$\mathfrak{sp}_{n/2}(\mathbb{F}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) : A^T J = -J A\}$	$\frac{1}{2}(n^2 + n)$	$n^2 + n$
$USp_{n/2}(\mathbb{C}) = Sp_{n/2}(\mathbb{C}) \cap U_n(\mathbb{C})$	$\mathfrak{usp}_{n/2}(\mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) : A^T J = -J A, A^\dagger = -A\}$	$\frac{1}{2}(n^2 + n)$	--

IV – GRUPO ORTOGONAL $G = O_2(\mathbb{R})$

$$\text{DIM}(G) = \frac{1}{2}(2^2 - 2) = 1$$

Se pusermos $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}) \Rightarrow \mathbf{T}^T = \mathbf{T}^{-1}$ donde

$$\begin{pmatrix} T_{11}^2 + T_{21}^2 & T_{11} T_{12} + T_{21} T_{22} \\ T_{11} T_{12} + T_{21} T_{22} & T_{12}^2 + T_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^2 + T_{12}^2 & T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} \\ T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} & T_{21}^2 + T_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Isto equivale a afirmar que $\begin{cases} T_{12}^2 = T_{21}^2 \\ T_{11}^2 = T_{22}^2 \end{cases}$ e $\begin{cases} T_{11}^2 + T_{12}^2 = 1 \\ T_{11} T_{21} + T_{12} T_{22} = 0 \end{cases}$ donde ou $\begin{cases} T_{12} = -T_{21} \\ T_{11} = T_{22} \end{cases} \Rightarrow \text{DET}[\mathbf{T}] = 1$, i.e.

$\mathbf{T} \in SO_2(\mathbb{R})$, ou $\begin{cases} T_{12} = T_{21} \\ T_{11} = -T_{22} \end{cases} \Rightarrow \text{DET}[\mathbf{T}] = -1$. Assim

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \mp \sqrt{1 - \alpha^2} \\ \pm \sqrt{1 - \alpha^2} & \mp \alpha \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$$

Para $\mathbf{T} \in SO_2(\mathbb{R})$ podemos ver que é a componente simplesmente conexa de matrizes da forma

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = e^{\theta \mathbf{A}}$$

onde o grupo a um parâmetro $\mathbf{T}_\theta = e^{\theta \mathbf{A}}$ é definido pelo elemento $\mathbf{A} \in \mathfrak{so}_n(\mathbb{R})$, onde

$$\mathbf{A} = \left(\frac{d\mathbf{T}_\theta}{d\theta} \right)_{\theta=0} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como é de esperar \mathbf{A} é antisimétrica.

V – GRUPO UNITÁRIO ESPECIAL $G = SU_2(\mathbb{C})$

$$\text{DIM}(G) = (2^2 - 1) = 3$$

Neste caso $\mathbf{T} \in SU_2(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T}^{-1}$; $\text{DET}(\mathbf{T}) = 1$ donde as equações que resultam de $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^\dagger$, $\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} = \mathbf{1}$ e $\text{DET}[\mathbf{T}] = 1$ são

$$\begin{aligned} |T_{21}|^2 &= |T_{12}|^2 & |T_{11}|^2 + |T_{21}|^2 &= 1 \\ (T_{11} - T_{22})\bar{T}_{21} &= (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) T_{12} & |T_{21}|^2 + |T_{22}|^2 &= 1 \\ \bar{T}_{12} T_{11} + \bar{T}_{22} T_{21} &= 0 & T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} &= 1 \end{aligned}$$

De $|T_{21}|^2 = |T_{12}|^2$ e $|T_{11}|^2 + |T_{21}|^2 = |T_{21}|^2 + |T_{22}|^2 = 1$ conclui-se $|T_{22}|^2 = |T_{11}|^2$. Escrevendo

$$T_{11} = e^{i\theta} \alpha \quad T_{21} = e^{i\varphi} \bar{\beta} \quad T_{22} = \bar{\alpha} \quad T_{12} = \beta$$

conclui-se que $\theta = 0$, $\varphi = \pi$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ donde a forma mais geral de elemento é

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \beta = x + iy \\ \alpha = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} + iz \end{cases}$$

VI – ÁLGEBRA DE LIE $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$

A respectiva álgebra de Lie é gerada pelas matrizes que se obtêm a partir da parametrização indicada através de tangentes a grupos-a-um-parâmetro passando pela identidade. Neste caso, grupos-a-um-parâmetro convenientes são:

$$\mathbf{T}_x(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2} & s \\ -s & \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_y(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-s^2} & i s \\ i s & \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_z(s) = \begin{pmatrix} i s + \sqrt{1-s^2} & 0 \\ 0 & -i s + \sqrt{1-s^2} \end{pmatrix}$$

donde

$$\left(\frac{d\mathbf{T}_x(s)}{ds} \right)_{s=0} = \mathbf{A}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{d\mathbf{T}_y(s)}{ds} \right)_{s=0} = \mathbf{A}_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \left(\frac{d\mathbf{T}_z(s)}{ds} \right)_{s=0} = \mathbf{A}_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Os comutadores destas matrizes determinam as relações de comutação que caracterizam a álgebra de Lie. De facto, o produto de Lie não é mais do que uma derivação interior.

$$[\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_y] = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}_z \quad [\mathbf{A}_x, \mathbf{A}_z] = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = -2\mathbf{A}_y \quad [\mathbf{A}_y, \mathbf{A}_z] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{A}_x$$

Lembrando as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \mathbb{A}_y, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i \mathbb{A}_x, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -i \mathbb{A}_z$$

vemos que poderíamos escolher outra base $\mathbb{E}_k = -\frac{1}{2}i \sigma_k$ com $k = 1, 2, 3$, e relações que se simplificam em

$$[\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_j] = \epsilon_{ij}^k \mathbb{E}_k$$

onde $\epsilon_{ij}^k = \epsilon_{ijr} \delta^{rk} = \pm 1$ é o sinal da permutação de índices $\begin{pmatrix} 123 \\ ijk \end{pmatrix}$.

VII – GRUPO $G = SO_3(\mathbb{R})$

$$\text{DIM}(G) = \frac{1}{2}(3^2 - 3) = 3$$

$SO_3(\mathbb{R})$ é o grupo de invariância duma forma bilinear simétrica em \mathbb{R}^3 e cuja acção preserva a forma de volume. Isto significa que, qualquer que seja $\mathbf{T} \in SO_3(\mathbb{R})$, se tem $\langle \mathbf{T}\mathbf{u}, \mathbf{T}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{T}^T \mathbf{T}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, ou seja $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{1} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T$. Mas então, para qualquer grupo-a-um-parâmetro de elementos destes deve ter-se $\mathbf{T}(s)^T \mathbf{T}(s) = \mathbf{1}$. A tangente junto à identidade $\mathbf{T}(0) = \mathbf{1}$ mostra que os elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ verificam

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{T}(s)^T \mathbf{T}(s)) \equiv 0 = \frac{d\mathbf{T}(s)^T}{ds} \mathbf{T}(s) + \mathbf{T}(s)^T \frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}$$

donde

$$\left(\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \right)_{s=0}^T = - \left(\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds} \right)_{s=0}$$

Concluimos assim que $\mathbb{A} \in \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ se $\mathbb{A}^T = -\mathbb{A}$, i.e. se \mathbb{A} for anti-simétrica, o que implica neste caso que $\text{TR}[\mathbb{A}^T] = \text{TR}[\mathbb{A}] = -\text{TR}[\mathbb{A}]$, i.e. $\text{TR}[\mathbb{A}] = 0$. Geralmente esta condição deduz-se de $\text{DET}[e^{\mathbb{A}}] \equiv e^{\text{Tr}[\mathbb{A}]}$, e em geral trata-se duma condição separada aplicável aos grupos especiais onde se exige $\text{DET}[\mathbf{T}] = 1$. Assim, na vizinhança da identidade $\mathbf{T}(s) = e^{s\mathbb{A}}$, donde

$$\text{DET}[e^{s\mathbb{A}}] = e^{s \text{Tr}[\mathbb{A}]} = 1 \implies \text{TR}[\mathbb{A}] = 0$$

Esta é a razão porque a álgebra de Lie de $O_3(\mathbb{R})$ e $SO_3(\mathbb{R})$ coincidem. Uma base para $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$ é

$$\mathbb{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

com relações de comutação

$$[\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2] = \mathbb{L}_3, \quad [\mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3] = \mathbb{L}_1, \quad [\mathbb{L}_3, \mathbb{L}_1] = \mathbb{L}_2, \quad \text{i.e.} \quad [\mathbb{L}_i, \mathbb{L}_j] = \epsilon_{ij}^k \mathbb{L}_k$$

onde $\epsilon_{ij}^k = \pm 1$ é o sinal da permutação $(123) \rightarrow (ijk)$.

Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , para cada elemento $\mathbb{A} \in \mathfrak{g}$ o operador adjunto $ad_{\mathbb{A}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ definido por

$$ad_{\mathbb{A}}(\mathbb{B}) = [\mathbb{A}, \mathbb{B}]$$

é uma derivação de \mathfrak{g} e a correspondência $\mathbb{A} \rightarrow ad_{\mathbb{A}}$ é uma representação da álgebra dita Regular.

No caso de $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$, com a base indicada, podemos escrever

$$ad_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$$

para $\mathbf{A} = a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y + c\mathbf{e}_z$, o que torna o espaço \mathbb{R}^3 com o produto vectorial convencional \times numa álgebra isomorfa a $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$.

$$ad_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bx - ay & cx - az \\ ay - bx & 0 & cy - bz \\ az - cx & bz - cy & 0 \end{pmatrix} = ad_{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}$$

5.3 Os grupos $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$.

1 – O GRUPO DE MÖBIUS \check{M} .

O grupo de transformações \check{M} do plano complexo

LaTeXError: Command invalid in math mode. See the LaTeX manual or LaTeX Companion for explanation. Please define a new math

$$\mathcal{M}_{cd}^{ab} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z' = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{com } ad - bc \neq 0$$

pode ser realizado por matrizes complexas de dimensão 2, i.e. matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ de determinante unidade (já que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ representam a mesma transformação **(5-1)**). Existe mesmo um recobrimento $Y : GL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \check{M}$ que a toda a matriz complexa $g = \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para λ arbitrário faz corresponder o mesmo $Y(g) = \mathcal{M}_{cd}^{ab}$. Podemos portanto escolher, para cada \mathcal{M}_{cd}^{ab} , valores de λ que verifiquem

$$\text{DET}(g) = \lambda^2(ad - bc) = 1$$

Assim podemos restringir o recobrimento a $Y : SL_2(\mathbb{C}) \rightarrow \check{M}$, mas note-se que a realização de \check{M} por matrizes $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ ainda é de 2 para 1 já que g e $-g \in SL_2(\mathbb{C})$ resultam no mesmo elemento \mathcal{M}_{cd}^{ab} de \check{M} . Isto significa que embora $SL_2(\mathbb{C})$ seja simplesmente conexo, \check{M} não o é (porque alguns caminhos fechados de \check{M} não podem deformar-se para um ponto, e.g. a imagem de qualquer caminho que comece em $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e acabe em $g' = -\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$).

O espaço vectorial suporte desta representação de $SL_2(\mathbb{C})$ é \mathbb{C}^2 e os seus vectores $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$ chamam-se **spinores**. A acção de $SL_2(\mathbb{C})$ em \mathbb{C}^2 definida naturalmente por

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

traduz-se numa acção de \check{M} em \mathbb{C} através da identificação

$$z = \frac{u}{v} \mapsto z' = \frac{u'}{v'} = \frac{az + b}{cz + d}$$

Resumindo

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{SL_2(\mathbb{C})} & \mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 z = \frac{u}{v} \in \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{M}} & \mathbb{C} \ni z' = \frac{u'}{v'} = \frac{az+b}{cz+d}
 \end{array}$$

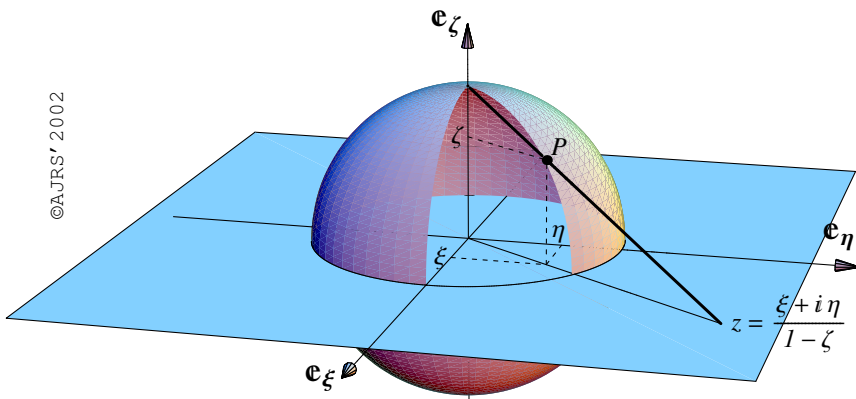
Esta acção restrita ao sub-grupo real $SL_2(\mathbb{R})$ deixa invariante o **SEMI-PLANO DE POINCARÉ**

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

onde $SL_2(\mathbb{R})$ age transitivamente e onde existe uma medida invariante

$$ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{\text{Im}(z)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

II – PROJECÇÃO ESTEREOGRÁFICA E $SU_2(\mathbb{C})$.



Esta imagem mostra como, na carta estereográfica $\{\mathcal{U}_+, \phi_+\}$ com origem no pólo $\{0, 0, 1\}$, a cada ponto z do plano complexo \mathbb{C} corresponde a um ponto $P = \{\xi, \eta, \zeta\}$ sobre a esfera de raio unidade, com coordenadas

$$\xi = \frac{2 \text{Re}(z)}{|z|^2 + 1} \quad ; \quad \eta = \frac{2 \text{Im}(z)}{|z|^2 + 1} \quad ; \quad \zeta = \frac{1 - |z|^2}{|z|^2 + 1}$$

Recíprocamente as coordenadas do ponto $P = \{\xi, \eta, \zeta\}$ correspondem a

$$\{\xi, \eta, \zeta\} \longleftrightarrow z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

Por exemplo:

$$\begin{array}{ll}
 \{1, 0, 0\} \longleftrightarrow z = 1 & \{-1, 0, 0\} \longleftrightarrow z = -1 \\
 \{0, 1, 0\} \longleftrightarrow z = i & \{0, -1, 0\} \longleftrightarrow z = -i \\
 \{0, 0, 1\} \longleftrightarrow z = \infty & \{0, 0, -1\} \longleftrightarrow z = 0
 \end{array}$$

Significa isto que uma rotação $\mathcal{R}_\xi(\frac{\pi}{2})$ de $\theta = \frac{\pi}{2}$ em torno de e_ξ deve fazer $0 \rightarrow i \rightarrow \infty \rightarrow -i \rightarrow 0$ e corresponder assim à transformação de Möbius, e à matriz de $SU_2(\mathbb{C})$

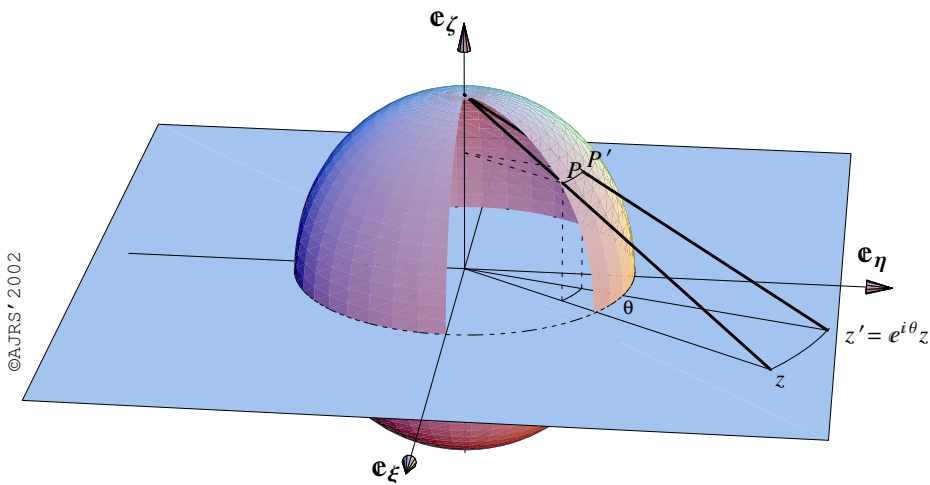
$$\mathcal{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies z' = \frac{z+i}{iz+1} \iff U_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

Uma rotação $\mathcal{R}_\eta(\frac{\pi}{2})$ por outro lado faz $0 \rightarrow -1 \rightarrow \infty \rightarrow 1 \rightarrow 0$ e deve corresponder a

$$\mathcal{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) \implies z' = \frac{z-1}{z+1} \iff U_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como é que uma rotação $\mathcal{R}_\zeta(\theta)$ em torno do eixo e_ζ afecta z ? De facto z' é simplesmente $z' = e^{i\theta}z$, e temos uma correspondência

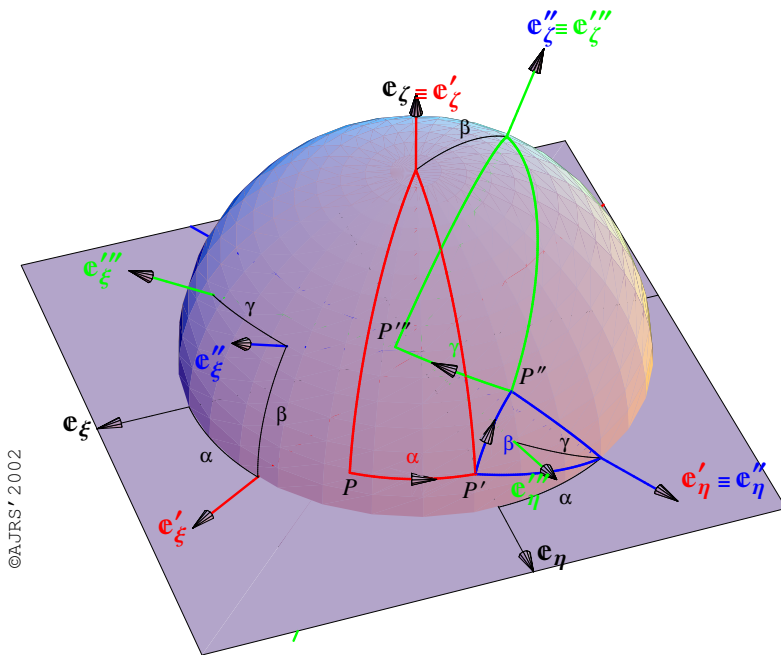
$$\mathcal{R}_\zeta(\theta) \implies z' = e^{i\theta}z \iff U_\zeta(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{bmatrix}$$



III – ROTAÇÕES E ÂNGULOS DE EULER

A parametrização convencional de Euler para rotações faz-se através de três ângulos α, β, γ , sendo possível verificar que qualquer outro ponto P''' da esfera que passa por P se obtém:

1. rodando P de α graus em torno dum eixo $e_\zeta \equiv e'_\zeta$ para P' ,
2. seguidamente rodando β graus em torno do eixo $e'_\eta \equiv e''_\eta$ (que resultou da primeira rotação de e_η) para P''
3. e finalmente rodando de γ graus em torno dum eixo e''_ζ (que resultou da segunda rotação de $e'_\zeta \equiv e_\zeta$).



Acontece que a rotação genérica definida por $\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{R}_{\zeta''}(\gamma)\mathbf{R}_{\eta'}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\alpha)$ pode ser referida a eixos fixos \mathbf{e}_{ζ} e \mathbf{e}_{η} com os mesmos ângulos α, β, γ , embora por ordem diferente. De facto podemos ver que

$$\mathbf{R}_{\zeta''}(\gamma) = \mathbf{R}_{\eta'}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\gamma)\mathbf{R}_{\eta'}^{-1}(\beta)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\zeta''}(\gamma)\mathbf{R}_{\eta'}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\alpha) &= \mathbf{R}_{\eta'}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\gamma)\mathbf{R}_{\zeta}(\alpha) \\ &= \mathbf{R}_{\eta'}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\alpha)\mathbf{R}_{\zeta}(\gamma)\end{aligned}$$

De forma semelhante, temos

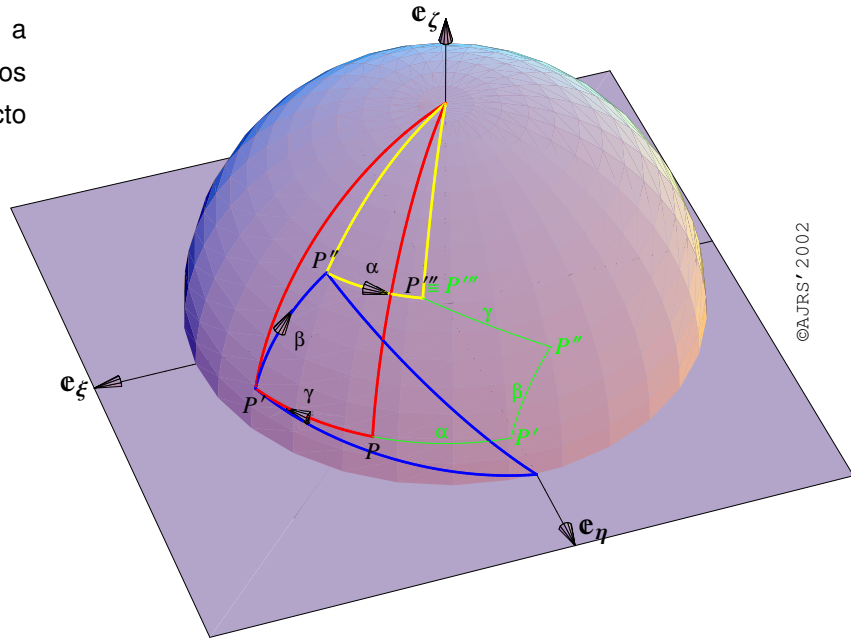
$$\mathbf{R}_{\eta'}(\beta) = \mathbf{R}_{\zeta}(\alpha)\mathbf{R}_{\eta}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}^{-1}(\alpha)$$

donde

$$\mathbf{R}_{\eta'}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\alpha)\mathbf{R}_{\zeta}(\gamma) = \mathbf{R}_{\zeta}(\alpha)\mathbf{R}_{\eta}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\gamma)$$

Ou seja

$$\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{R}_{\zeta''}(\gamma)\mathbf{R}_{\eta'}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\alpha) = \mathbf{R}_{\zeta}(\alpha)\mathbf{R}_{\eta}(\beta)\mathbf{R}_{\zeta}(\gamma)$$



©AJFS' 2002

Na realidade, são sempre necessários três ângulos para parametrizar uma rotação, porque dois definem a direcção do eixo de rotação

$$\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \cos(\varphi)\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\varphi)\sin(\theta)\mathbf{e}_2 + \cos(\theta)\mathbf{e}_3 = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$$

enquanto o terceiro ϕ determina a magnitude da rotação em torno desse eixo. De facto, a matriz de $SU_2(\mathbb{C})$, recobrimento universal de $SO_3(\mathbb{R})$, que representa essa rotação é simplesmente

$$U_{\mathbf{n}(\theta, \varphi)}(\phi) = e^{-i\frac{\phi}{2}\mathbf{n}(\theta, \varphi) \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - ic\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-ai - b)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-ai + b)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + ic\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \sum_{k=1}^3 \sigma_k \mathbf{e}_k$ é um vector formal definido pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Note-se que a cada σ_k corresponde a uma rotação de ϕ em torno de um eixo \mathbf{e}_k . Assim podemos indicar

$$U_{\hat{\mathbf{x}}_1}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad U_{\mathbf{e}_2}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad U_{\mathbf{e}_3}(\phi) = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{bmatrix}$$

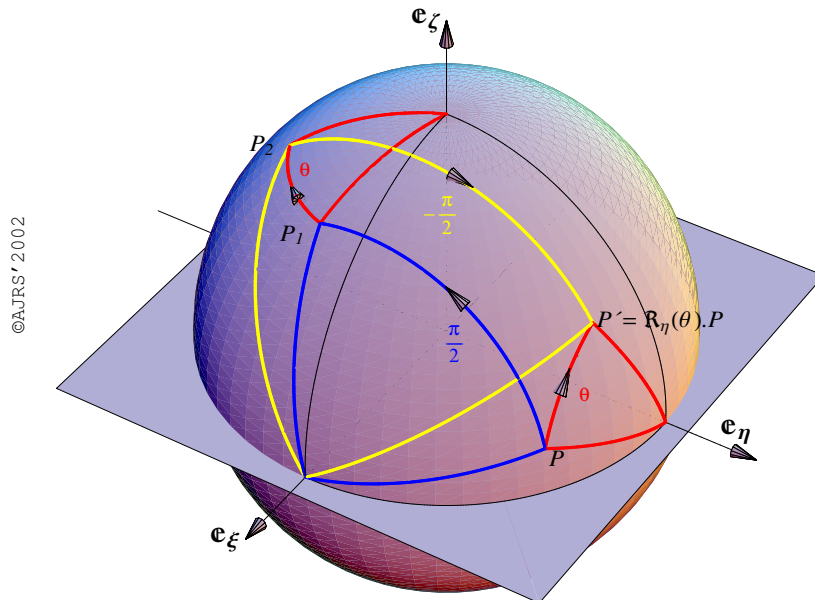
Poderíamos questionarmo-nos sobre a relação entre esta parametrização e a de Euler, a qual pode ser deduzida da expressão genérica para $SU_2(\mathbb{C})$ que é

$$U_{\alpha\beta\gamma} = \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}} & -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}} \\ \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{(\alpha-\gamma)}{2}} & -\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{(\alpha+\gamma)}{2}} \end{bmatrix}$$

Claro que podemos raciocinar (erróneamente) da seguinte maneira: rodar o eixo e_ζ até coincidir com $e'_\zeta = \mathfrak{n}(\theta, \varphi)$ e seguidamente rodar ϕ graus em torno de e'_ζ . Com esta identificação vemos que $\phi = \gamma$, mas a identificação restante é inviável porque $e^{-i\frac{\phi}{2}\mathfrak{n}(\theta, \varphi)\cdot\vec{\sigma}}$ tem muitas formas de decomposição em produto de três rotações.

Na realidade, qualquer rotação $\mathbb{R}_\eta(\theta)$ em torno de e_η pode ser encarada como uma rotação pelo mesmo ângulo θ em torno de e_ζ através duma composição

$$\mathbb{R}_\eta(\theta) = \mathbb{R}_\xi\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathbb{R}_\zeta(\theta)\mathbb{R}_\xi\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



Note que rotações positivas são retrógradas para e_ξ e e_ζ e directas para e_η . Para e_ξ e e_η ambas começam no plano horizontal no sentido e_ζ , enquanto que as geradas por e_ζ começam no plano $e_\xi \times e_\zeta$.

5.4 O grupo $SO_3(\mathbb{R})$ de rotações em \mathbb{R}^3 .

Vamos agora usar projecções estereográficas para cartografar $SO_3(\mathbb{R})$, o que resultará na realização de uma correspondência entre uma rotação $g \in SO_3(\mathbb{R})$ e um elemento bem determinado do grupo de Möbius de transformações de \mathbb{C} . A identificação de um ponto $\mathfrak{n} = (\xi, \eta, \zeta)$ sobre a esfera

$$S^3 = \{\mathfrak{n} \in \mathbb{R}^3 : |\mathfrak{n}|^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\}$$

com a sua projecção no plano complexo \mathbb{C} através de $\Pi(\mathfrak{n}) = z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$ permite escrever imediatamente uma rotação de γ em torno do eixo e_ζ como

$$\mathbf{R}_\zeta(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow z' = e^{i\theta}z \rightarrow U_\zeta(\theta) = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$$

Para as rotações em geral verifica-se que

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_\zeta(\gamma)\mathbf{R}_\eta(\beta)\mathbf{R}_\zeta(\alpha)$$

onde α, β, γ designam ângulos de Euler. Mas em particular, podemos estabelecer

$$\mathbf{R}_\eta(\beta) = \mathbf{R}_\zeta\left(-\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_\zeta(\beta)\mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

e de forma análoga

$$\mathbf{R}_\xi(\alpha) = \mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right)\mathbf{R}_\zeta(\alpha)\mathbf{R}_\eta\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

O efeito destas rotações num elemento genérico $z = \Pi(\mathfrak{n})$ pode-se determinar se conhecermos os correspondentes elementos de $SU_2(\mathbb{R})$ para $\mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\mathbf{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Mas iterando $\mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sobre $\mathfrak{n}_o = -e_\zeta$ obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_o = \mathfrak{n}_1 = e_\eta &\rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_1) = i = \frac{b}{d} \\ \mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = e_\zeta &\rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_2) = \infty = \frac{ai + b}{ci + d} \\ \mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 = -e_\eta &\rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_3) = -i = \frac{a}{c} \\ \mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = -e_\zeta &\rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_4) = 0 = \frac{a(-i) + b}{c(-i) + d} \end{aligned}$$

donde $z' = \frac{z + i}{iz + 1}$ para uma rotação $\mathbf{R}_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Então $U_\zeta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \in SU_2(\mathbb{C})$ e consequentemente

$$\mathbf{R}_\eta(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \rightarrow U_\eta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Assim, uma rotação de θ em torno de e_η traduz-se estereográficamente na transformação de $z \in \mathbb{C}$ em

$$z' = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)z - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Da mesma forma, poderíamos ter começado por determinar $\mathcal{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right)$ iterando-o sobre $\mathfrak{n}_o = -\mathbf{e}_\zeta$,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right).\mathfrak{n}_o = \mathfrak{n}_1 &= -\mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_1) = -1 = \frac{b}{d} \\ \mathcal{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right).\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 &= \mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_2) = \infty = \frac{a(-1) + b}{c(-1) + d} \\ \mathcal{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right).\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 &= \mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_3) = 1 = \frac{a}{c} \\ \mathcal{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right).\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 &= -\mathbf{e}_\zeta \rightarrow \Pi(\mathfrak{n}_4) = 0 = \frac{a + b}{c + d}\end{aligned}$$

donde $z' = \frac{z-1}{z+1}$ para $\mathcal{R}_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Obteríamos então

$$U_\eta\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e daí que

$$\mathcal{R}_\xi(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \rightarrow U_\xi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

e, para uma rotação arbitrária de θ em torno de \mathbf{e}_ζ , a transformação de Möbius correspondente é

$$z' = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)z + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)z + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

É possível verificar que, usando as matrizes de Pauli $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ se tem

$$U_\zeta(\alpha) = e^{i\frac{\alpha}{2}\sigma_1}, \quad U_\eta(\beta) = e^{-i\frac{\beta}{2}\sigma_2}, \quad U_\zeta(\gamma) = e^{i\frac{\gamma}{2}\sigma_3}$$

Para o caso geral, vemos portanto que

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{R}_\zeta(\gamma)\mathcal{R}_\eta(\beta)\mathcal{R}_\zeta(\alpha) \rightarrow U_{\alpha\beta\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} & \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \\ -\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\frac{\gamma-\alpha}{2}} & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)e^{-i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \end{bmatrix}$$

Para determinar o eixo de rotação precisamos de encontrar P_o que resolve a equação $\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma}.P_o = P_o$, o que determina

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{\lambda} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\mathbf{e}_\zeta + \cos\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)\mathbf{e}_\eta \right) + \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\mathbf{e}_\zeta$$

onde fizemos $\lambda = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)^2}$. Podemos verificar que o eixo de rotação deve pertencer ao plano ortogonal a $\mathbf{e}_\zeta \times (\mathcal{R}_\zeta\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right).\mathbf{e}_\eta)$.

I – REPRESENTAÇÃO INDUZIDA POR $SU_2(\mathbb{C})$.

Para encontrar a matriz de $SU_2(\mathbb{C})$ que corresponde à rotação $\mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta \mathbf{R}_\gamma$ é preciso descobrir a matriz

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

que corresponde à transformação de Möbius

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta} \rightarrow z' = \frac{\xi' + i\eta'}{1 - \zeta'} = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

quando

$$\{\xi, \eta, \zeta\} \rightarrow \{\xi', \eta', \zeta'\} = \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} \cdot \{\xi, \eta, \zeta\}$$

O resultado é

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha + \gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha - \gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{\frac{1}{2}i(\alpha - \gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{\frac{1}{2}i(\alpha + \gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Isto significa que

$$e^{-i\frac{\phi}{2} \mathbf{n} \cdot \vec{\sigma}} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} \lambda \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & (-ia - b) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ (-ia + b) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) & \lambda \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha + \gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{1}{2}i(\alpha - \gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ e^{\frac{1}{2}i(\alpha - \gamma)} \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{\frac{1}{2}i(\alpha + \gamma)} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

onde fizemos $\mathbf{n} = \frac{1}{\lambda} \{a, b, 1\}$ com $\lambda^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1 + a^2 + b^2$.

A solução indica que podemos tomar a direcção do eixo de rotação como o vector

$$\mathbf{r} = \left\{ -\sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right), \cos\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right), \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \right\}$$

e ângulo de rotação ϕ tal que e

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) &= -\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \sqrt{1 + \csc^2\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) \tan^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} \end{aligned}$$

Conversamente, dada uma direcção

$$\mathbf{n} = \left\{ \cos(\theta) \cos(\varphi), \sin(\theta) \cos(\varphi), \sin(\varphi) \right\}$$

e um ângulo de rotação ϕ , podemos querer obter a correspondente rotação em termos de α, β, γ . Neste caso, temos

$$-e^{-\frac{1}{2}i(\alpha - \gamma)} = i e^{-i\theta} \implies \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) = \theta + \frac{\pi}{2}$$

e

$$\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \tan(\varphi)$$

$$\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \sec(\varphi)$$

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = -\cos(\varphi) \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi) \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

5.5 Representações Irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$ e $SO_3(\mathbb{R})$

Para determinar as representações irredutíveis de $SU_2(\mathbb{C})$ iremos considerar uma base de polinómios de grau $n = 2j$,

$$\{u^{2j}, u^{2j-1}v, u^{2j-2}v^2, \dots, uv^{2j-1}, v^{2j}\}$$

o que proporciona uma representação de dimensão $d = 2j + 1$. Se pretendemos que a representação seja unitária convém normalizar esta base e usar

$$f_m = \frac{u^{j+m} v^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$$

com $m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\}$.

No caso $j = \frac{1}{2}$ temos $\begin{cases} f_{-1/2} = v \\ f_{1/2} = u \end{cases}$ donde

$$\mathcal{D}_{ab}^{(1/2)} = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}$$

No caso $j = 1$ temos $\begin{cases} f_{-1} = v^2 \\ f_0 = uv \\ f_1 = u^2 \end{cases}$ donde

$$\mathcal{D}_{ab}^{(1)} = \mathbf{R}_{\alpha\beta\gamma} \quad \text{com} \quad \begin{cases} a = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}} \\ b = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} \end{cases}$$

Em geral

$$\mathcal{D}_{ab}^{(j)} f_m = c_{jm} (au + bv)^{j+m} (-\bar{b}u + \bar{a}v)^{j-m} = \sum_{m'=-j}^j \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(a, b) f_{m'}$$

onde $c_{jm} = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$ e

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(a, b) = \sum_{m''=-j}^j \frac{1}{c_{jm} c_{jm''}} \frac{a^{j+m-\mu} b^\mu \bar{a}^{j-m'-\mu} (-\bar{b})^{m'-m+\mu}}{(j+m-\mu)!\mu!(j-m'-\mu)!(m'-m+\mu)!}$$

Mostra-se que $\sum_{m=-j}^j |f_m|^2 = \frac{1}{(2j)!} (|u|^2 + |v|^2)^{2j}$ é invariante para estas transformações de $SU_2(\mathbb{C})$.

O **CHARACTER** da representação irredutível (j) é simplesmente:

$$(5-2) \quad \chi^{(j)}(\phi) = \sum_{m=-j}^j e^{im\phi} = \frac{\sin\left(\frac{(2j+1)\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)}$$

Para j integral, as matrizes

$$\mathcal{D}_{m'm}^{(j)}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{D}_{m'm}^{(j)}\left(\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\alpha+\gamma}{2}}, \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}}\right)$$

determinam uma representação irredutível de $SO_3(\mathbb{R})$.

I – RAÍZES E FORMA CANÓNICA DE RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO

As propriedades de uma álgebra de Lie ficam completamente determinadas pelas suas constantes de estrutura c_{ij}^k . Uma mudança de base $\mathbb{E}_i \rightarrow \mathbb{E}'_i = A \cdot \mathbb{E}_i$ é acompanhada por uma correspondente transformação das constantes de estrutura

$$c_{ij}^k \rightarrow c'_{ij}{}^k = A_i^r A_j^s A_u^{-1k} c_{rs}^u$$

Podemos escrever o tensor

$$\mathfrak{S} = c_{ij}^k \mathbb{E}^i \otimes \mathbb{E}_k \otimes \mathbb{E}^j = \mathbb{E}^i \otimes \text{ad}_{\mathbb{E}_i}$$

em termos da representação regular

$$\text{ad}_{\mathbb{E}_i} = c_{ij}^k \mathbb{E}_k \otimes \mathbb{E}^j$$

e então $\mathbb{E}_i \cdot \mathfrak{S} \cdot \mathbb{E}_j = [\mathbb{E}_i, \mathbb{E}_j] = c_{ij}^k \mathbb{E}_k$.

A procura de uma forma canónica para as relações de comutação de uma álgebra de Lie reduz-se ao problema de escrever as matrizes $\text{ad}_{\mathbb{E}_i}$ na sua **forma de Jordan canónica**, i.e. bloco-diagonal com blocos de **Jordan** de ordem k , como

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$$

o que se atinge resolvendo a equação secular $\det[\text{ad}_{\mathbb{E}_i} - \lambda \mathbb{I}] = 0$ e construindo a matriz de mudança de base com os vectores próprios. Toda a teoria de **RAÍZES** de álgebras de Lie é dedicada a este problema classificativo.

A representação **REGULAR** $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{AUT}[\mathfrak{g}]$ não é fiel em geral, mas consegue distinguir álgebras de Lie diferentes. A presença de sub-álgebras invariantes indica a redutibilidade da representação regular. Um mecanismo para construir sub-álgebras invariantes é a derivação sucessiva

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{(1)}, [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}] = \mathfrak{g}^{(2)} \dots [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}] = \mathfrak{g}^{(n)}$$

Para álgebras de dimensão finita, a partir de um dado n tem-se necessariamente

$$\mathfrak{g}^{(n-1)} \neq \mathfrak{g}^{(n)} = \mathfrak{g}^{(n+1)} = \dots$$

Se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ a álgebra diz-se **resolúvel**. O **radical** da álgebra \mathfrak{g} é a sub-álgebra resolúvel máxima de \mathfrak{g} .

II – CONSTANTES DE ESTRUTURA E REPRESENTAÇÃO REGULAR DE ÁLGEBRA

Uma **FORMA DE KILLING** é uma forma bilinear sobre uma álgebra de Lie definida através da sua representação regular por

$$g(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \langle \mathbb{A}, \mathbb{B} \rangle = \text{TR}[\text{ad}_{\mathbb{A}} \cdot \text{ad}_{\mathbb{B}}]$$

De facto dado

$$\mathbb{X} = X^i \mathbb{A}_i = X^i (\mathbb{A}_i)_k^j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \quad \text{e} \quad \mathbb{A} = \alpha_r (\mathbb{A}^r)_s^t \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}^s$$

com

$$\mathbb{A}^r \cdot \mathbb{A}_i = (\mathbb{A}^r)_s^t (\mathbb{A}_i)_k^j \delta_j^s \delta_t^k = (\mathbb{A}^r)_s^k (\mathbb{A}_i)_k^s = \text{TR}[\mathbb{A}^r \mathbb{A}_i] = \delta_i^r$$

por isso

$$\alpha(\mathbb{X}) = X^i (\mathbb{A}_i)_k^j \alpha_r (\mathbb{A}^r)_s^t \delta_j^s \delta_t^k = X^i (\mathbb{A}_i)_t^s \alpha_r (\mathbb{A}^r)_s^t = (\mathbb{X})_t^s (\alpha)_s^t = \text{TR}[\mathbb{X} \mathbb{A}]$$

CAPÍTULO 6

GRUPOS LOCALMENTE COMPACTOS

Contents

6.1 Medida Invariante Sobre um Grupo	139
Espaços de Medida	139
Medida de Haar	140
6.2 Teoremas	141
Teorema de Peter-Weyl	141
Dualidade de Grupos	141
Teorema de Pontryagin	142
Teorema de Plancherel	143
6.3 Decomposição de Mackey	144
Teorema de Mackey	144
6.4 Medidas c/valor Projecção	145
Teorema Espectral para Grupos Abelianos	145
6.5 Representações Induzidas	147
6.6 Sistemas de Imprimitividade	151
6.7 Produtos Semi-directos	152
6.8 Problemas da Parte IV	155

6.1 Medida Invariante Sobre um Grupo

I – ESPAÇOS DE MEDIDA

DEFINIÇÃO [6.1]

Um **ESPAÇO DE BOREL** é um conjunto S dotado de uma família distinta $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos $\mathcal{B}_\alpha \subset S$ que é **FECHADA** para as operações de:

- i. **COMPLEMENTO** $\mathcal{B}_\alpha^c \subset \mathcal{B}$.
- ii. **UNIÃO NUMERÁVEL** $\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i\right) \subset \mathcal{B}$.
- iii. **INTERSECÇÃO NUMERÁVEL** $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_i\right) \subset \mathcal{B}$.

DEFINIÇÃO [6.2]

Uma **MEDIDA** μ sobre um espaço de Borel S é uma função positiva, σ -aditiva, definida em todos os conjuntos de Borel, i.e. uma função que verifica:

- i. Sempre que, para $\forall i, j$, se tenha $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, então $\mu\left(\bigcup_i \mathcal{B}_i\right) = \sum_i \mu(\mathcal{B}_i)$.
- ii. Existe uma coleção $\{\mathcal{B}_i\}$ para os quais $\mu(\mathcal{B}_i) < \infty$ e $S = \bigcup_i \mathcal{B}_i$.

- Duas medidas μ e ν que possuam os **MESMOS CONJUNTOS DE MEDIDA ZERO** dizem-se da mesma **CLASSE DE MEDIDA**. Neste caso, as derivadas de **RADON-NIKODIM** $\frac{d\mu}{d\nu}$ e $\frac{d\nu}{d\mu}$ existem ambas. No caso de S ser **NUMERÁVEL**, duas medidas pertencem à mesma **CLASSE DE MEDIDA** se e só se forem positivas nos mesmos pontos.

II – MEDIDA DE HAAR

DEFINIÇÃO [6.3]

Uma medida $\mu \neq 0$ num grupo G que, para qualquer boreliano $\mathcal{B} \subset G$ e para todo o $g \in G$, verifique $\mu(g\mathcal{B}) = \mu(\mathcal{B})$ diz-se **MEDIDA DE HAAR SEMI-INVARIANTE À ESQUERDA**. (respectivamente **À DIREITA** se $\mu(\mathcal{B}g) = \mu(\mathcal{B})$).

- Um grupo **UNIMODULAR** é um grupo onde existe uma medida de Haar simultaneamente semi-invariante à esquerda e à direita. Qualquer grupo compacto G é Unimodular, i.e. as medidas de Haar invariantes à esquerda são também invariantes à direita, e todas as medidas de Haar verificam $\mu(G) < \infty$.
- Uma medida de Haar existe e é **ÚNICA** se G for **LOCALMENTE COMPACTO** e **SEPARÁVEL** mas se G além disso for **NÃO-COMPACTO**, $\mu(G) = \infty$ para qualquer medida de Haar (que não são necessariamente invariantes).

EXEMPLOS

I. Medida de Haar num grupo discreto: $\mu(\mathcal{B}) = \lambda \# |\mathcal{B}|$.

II. Medida de Haar em \mathbb{R} : $\mu([a, b]) = \lambda(b - a)$ $d\mu(g) = dx$.

III. Medida de Haar em $G = \left\{ g = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$: $d\mu(g) = \frac{1}{x^2} dx dy$.

IV. Medida de Haar em $G = GL_n(\mathbb{R})$: $d\mu(g) = \frac{1}{\det(g)^n} dx^1 \dots dx^n$.

V. Medida de Haar em $SU(2, \mathbb{C})$ (o recobrimento universal de $SO(3)$).

$$SU(2, \mathbb{C}) = \left\{ U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix}; \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

Como α e β são complexos, $SU(2, \mathbb{C})$ pode ser visto como uma hiper-esfera em \mathbb{R}^4 , que é simplesmente conexa e **COMPACTA**. $SU(2, \mathbb{C})$ é portanto um grupo **UNIMODULAR** e tem uma **MEDIDA DE HAAR** invariante finita.

Os elementos de $SU(2, \mathbb{C})$ podem ser parametrizados pelo ângulo de rotação θ em torno de um eixo $\mathbf{n}(\alpha, \beta) = \{\sin(\beta) \cos(\alpha), \sin(\beta) \sin(\alpha), \cos(\beta)\}$, pelo que obtemos uma representação spinorial usando

$$U = e^{-i \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{1} - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

onde $\boldsymbol{\sigma} = \sigma^i e_i$, com σ^i as matrizes de Pauli, $\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Formas invariantes são obtidas das entradas da matriz $U^{-1} dU$ ou $(dU)U^{-1}$, e o seu produto externo dá a medida de Haar

$$d\mu(\alpha, \beta, \theta) = 4 \sin(\beta) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\alpha d\beta d\theta$$

6.2 Teoremas

I – **TEOREMA DE PETER-WEYL**

TEOREMA [6.4]

- i. A **REPRESENTAÇÃO REGULAR** de qualquer grupo **COMPACTO** e separável G pode decompor-se numa **SOMA DIRECTA** de representações irreduzíveis de **DIMENSÃO FINITA**.
- ii. Cada representação irreduzível aparece com uma **MULTIPLICIDADE FINITA** igual à dimensão da representação.
- iii. **TODAS** as representações irreduzíveis aparecem na decomposição.
- iv. Como $\mathcal{L}^2(G, \mu)$ é **SEPARÁVEL**, o conjunto de representações irreduzíveis inequivalentes é **NUMERÁVEL**.

No caso de grupo não compactos, essencialmente por não existir uma **MEDIDA INVARIANTE E FINITA**:

- Existem representações **REDUTÍVEIS** que não são **COMPLETAMENTE REDUTÍVEIS**.
- Existem representações unitárias irreduzíveis de **DIMENSÃO INFINITA**.
- Muitos grupos só têm a representação trivial de dimensão finita.
- $\text{TR}[U]$ não tem significado em representações de dimensão infinita, pelo que a definição de caracteres deve ser feita de outra forma.

III – TEOREMA DE PONTRYAGIN

TEOREMA [6.5]

Se G é um grupo **ABELIANO** localmente compacto, cada elemento $g \in G$ define um caracter $\hat{g} \in \hat{G}$ do grupo dual \hat{G} através da relação $\hat{g}(\chi) = \chi(g)$, $\forall \chi \in \hat{G}$.

Todos os caracteres de \hat{G} são desta forma, pelo que G é **TOPOLOGICAMENTE ISOMORFO** a $\hat{\hat{G}}$.

COROLÁRIO [6.6]

Se G é um grupo **ABELIANO** localmente compacto, os caracteres de G **SEPARAM** os pontos de G .

DEMONSTRAÇÃO

Se $\chi(g) = \chi(g')$, $\forall \chi \in \hat{G}$, então $\hat{g} = \hat{g}' \iff g = g'$ pelo isomorfismo $G \simeq \hat{\hat{G}}$. ■

EXEMPLOS:

- i. Um exemplo de grupo **ABELIANO NUMERÁVEL** é o grupo cíclico infinito, i.e. o grupo aditivo dos inteiros $G = (\mathbb{Z}, +)$. Neste caso $\chi(n) = \chi(1)^n$ donde resulta que os caracteres de G ficam definidos pelo seu valor em $n = 1$, o qual pode ser qualquer número complexo de módulo unitário:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{Z}} &\simeq \mathbb{S}^1 = \{ \chi^{(\theta)}(1) = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \pmod{2\pi} \} \\ \hat{\mathbb{Z}} &\simeq \mathbb{Z} = \{ \hat{\chi}(\chi^{(\theta)}) = \chi^{(\theta)}(n) = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z} \}. \end{aligned}$$

- ii. Um exemplo simples de um grupo **ABELIANO LOCALMENTE COMPACTO** que não é discreto nem compacto é o grupo aditivo real $G = (\mathbb{R}, +)$. Neste caso $\hat{G} \simeq G$ porque os caracteres são todos do tipo

$$\hat{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R} = \{ \chi^{(y)}(x) = e^{ixy}, y \in \mathbb{R} \}$$

- iii. Se $G = V \simeq (\mathbb{R}^n, +)$ é o grupo aditivo de qualquer espaço vectorial real de dimensão finita V , os caracteres são da forma $\chi^{(\alpha)}(\mathbf{x}) = e^{i\alpha(\mathbf{x})}$, $\forall \alpha \in V^*$. Neste caso $\hat{G} = V^*$ é mesmo o dual (como espaço vectorial) de G .

¹ - - Hewitt & Ross: *Abstract Harmonic Analysis I*, Springer-Verlag (1963) § 24.

- iv. É possível mostrar que qualquer grupo **ABELIANO** localmente compacto é de forma única um produto directo dum grupo vectorial de dimensão finita e um grupo \tilde{G} possuindo um sub-grupo **COMPACTO** H cujo quociente $\frac{\tilde{G}}{H}$ é **FINITO**.

IV – TEOREMA DE PLANCHEREL

TEOREMA [6.7]

Para G um grupo **ABELIANO NÃO-COMPACTO**, localmente compacto, a **TRANSFORMADA GENERALIZADA DE FOURIER** de $\Psi \in \mathcal{L}^2(G, \mu) \cap \mathcal{L}^1(G, \mu)$ define-se por

$$\hat{\Psi}(\chi) = \int_G \Psi(g) \bar{\chi}(g) d\mu(g)$$

Então:

- i. Existe uma única medida de Haar $\hat{\mu}$ em \hat{G} (designada **MEDIDA DE PLANCHEREL**) tal que $\|\Psi\|_G^2 = \|\hat{\Psi}\|_{\hat{G}}^2$, i.e.

$$\int_G |\Psi(g)|^2 d\mu(g) = \int_{\hat{G}} |\hat{\Psi}(\chi)|^2 d\hat{\mu}(\chi)$$

- ii. A correspondência $\Psi \rightarrow \hat{\Psi}$ tem uma extensão única para uma **APLICAÇÃO UNITÁRIA** de $\mathcal{L}^2(G, \mu)$ para $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$.

Para grupos

FINITOS: O dual de um grupo **FINITO** G é um grupo **ABELIANO FINITO**, de ordem $\#\hat{G} \leq \#|G|$, relativamente ao produto $(\chi\chi')(g) = (\chi'\chi)(g) = \chi(g)\chi'(g)$, $\forall g \in G$.

- O número de caracteres em \hat{G} é igual ao número de classes de conjugação em G e ao número de representações irreduzíveis inequivalentes.

& ABELIANOS: Qualquer grupo **ABELIANO FINITO** G é isomorfo ao seu dual: $G \simeq \hat{G}$.

COMPACTOS: Devido à correspondência entre representações irreduzíveis de um grupo compacto G e os seus caracteres (Peter-Weyl), o dual \hat{G} de um grupo separável e compacto G é **ABELIANO NUMERÁVEL**. Dada uma representação redutível $U : G \rightarrow \mathcal{H}$ de um grupo **COMPACTO** é possível decompor o espaço de Hilbert \mathcal{H} em **PRIMÁRIOS DISJUNTOS** $\mathcal{H}_{\chi^{(i)}}$ que vêm associados a cada carácter $\chi^{(i)} \in \hat{G}$ de uma representação irreduzível de dimensão d_i . De facto, pode-se construir um operador de projecção $P_{\chi^{(i)}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\chi^{(i)}}$

$$P_{\chi^{(i)}} = \frac{d_i}{\mu(G)} \int_G \bar{\chi}(g) U_g^{(i)} d\mu(g)$$

- Os $\mathcal{H}_{\chi^{(i)}}$ são sub-espacos invariantes de \mathcal{H} , mutuamente ortogonais.
- A subrepresentação definida por U restrito a $\mathcal{H}_{\chi^{(i)}}$ é uma **SOMA DIRECTA** de cópias equivalentes da mesma representação irreduzível $U^{(i)}$.

& ABELIANOS: Qualquer grupo separável, **ABELIANO COMPACTO** pode ser obtido como o dual dum grupo **ABELIANO NUMERÁVEL** (pelo teorema de dualidade de Pontriagyn, $G \simeq \hat{\hat{G}}$). Em consequência do teorema de Peter-Weyl, os caracteres $\chi \in \hat{G}$ são mutuamente ortogonais e formam um **SISTEMA COMPLETO** em $\mathcal{L}^2(G)$, i.e. toda a função $\Psi \in \mathcal{L}^2(G)$ se decompõe de forma única num somatório

$$\Psi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} C_\chi \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} C_\chi \hat{g}(\chi)$$

A função $\hat{\Psi}(\chi) = C_\chi$ designa-se a **TRANSFORMADA DE FOURIER** de Ψ .

Se $\hat{\mu}$ designar a medida discreta em qualquer grupo **ABELIANO NUMERÁVEL** \hat{G} , $\hat{\mu}$ é uma medida de Haar e podemos escrever a correspondência unitária entre $\hat{\Psi} \in \mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$ e a sua transformada de Fourier como

$$\Psi(g) = \int_{\hat{G}} \hat{\Psi}(\chi) \hat{g}(\chi) d\hat{\mu}(\chi) \in \mathcal{L}^2(G, \mu)$$

NÃO-COMPACTOS: ?

& ABELIANOS: Reciprocamente, dado o isomorfismo entre G e $\hat{\hat{G}}$, o dual \hat{G} dum grupo **ABELIANO NÃO-COMPACTO** só pode ser um grupo igualmente **ABELIANO NÃO-COMPACTO**.

6.3 Decomposição de Mackey

1 – TEOREMA DE MACKEY

TEOREMA [6.8]

Seja G um grupo separável, localmente compacto, e K um sub-grupo fechado de G . Então:

- i. Existe um boreliano $S \subset G$ tal que, para **TODO** o $g \in G$, é **ÚNICA** a decomposição de g na forma

$$g = ks \quad ; \quad k \in K, \quad s \in S$$

EXEMPLO

Consideremos o grupo de transformações lineares do plano real com determinante 1

$$G \sim SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \text{DET}(\mathbf{B}) = 1 \right\}$$

² - G.Mackey 1952 - "Induced Representations of Locally Compact Groups" -*Ann. of Math.* **55** pp.101-139

Vamos usar o sub-grupo K

$$K = \left\{ \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \lambda & \nu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda \neq 0 \right\}$$

K é um sub-grupo fechado de $SL_2(\mathbb{R})$. Então, tendo em conta que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \mathbf{K}\mathbf{S} \Rightarrow \begin{cases} (\delta \neq 0): & \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \delta^{-1} & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} ; & \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma\delta^{-1} & 1 \end{pmatrix} \\ (\delta = 0): & \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \beta & -\alpha \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} ; & \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$S \sim \left\{ \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \nu & 1 \end{pmatrix} ; \nu \in \mathbb{R} \right\}$ quase sempre (O conjunto dos $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ tem medida nula.)

S é um dos sub-grupos notáveis de G por ser um sub-grupo **NILPOTENTE** maximal de G .

6.4 Medidas c/valor Projecção

DEFINIÇÃO [6.9]

Uma **MEDIDA C/VALOR PROJECÇÃO** DE \mathcal{H} sobre um espaço de Borel S é uma função $\mathbf{P} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ definida sobre os Borelianos $\mathcal{B} \subset S$ tal que:

- i. $\mathbf{P}_{\mathcal{B}}$ são **OPERADORES DE PROJECÇÃO** num espaço de Hilbert \mathcal{H} .
- ii. $\mathbf{P}_S = \mathbf{I}$ e $\mathbf{P}_{\emptyset} = \mathbf{0}$.
- iii. $\mathbf{P}_{\mathcal{B} \cap \mathcal{B}'} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}} \mathbf{P}_{\mathcal{B}'}$ ($\forall \mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathcal{B}_S$).
- iv. $\mathbf{P}_{\cup_i \mathcal{B}_i} = \sum_i \mathbf{P}_{\mathcal{B}_i}$ (se $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset, \forall i, j$).

DEFINIÇÃO [6.10]

Uma **MEDIDA ESPECTRAL** é uma aplicação $\mathbf{P} : \hat{\mathcal{B}}_{\hat{G}} \rightarrow \Pi_{\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})}$ do espaço dos Borelianos $\hat{\mathcal{B}} \subset \hat{G}$ para o espaço $\Pi_{\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})}$ das **PROJECÇÕES** $\mathbf{P}_{\hat{\mathcal{B}}}$ do espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$ definida por

$$(\mathbf{P}_{\hat{\mathcal{B}}} \hat{\Psi})(\chi) \doteq \zeta_{\hat{\mathcal{B}}}(g) \Psi(g)$$

onde $\zeta_{\hat{\mathcal{B}}} : \hat{G} \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ é a **FUNÇÃO CARACTERÍSTICA** dum conjunto $\hat{\mathcal{B}}$.

1 – TEOREMA ESPECTRAL PARA GRUPOS ABELIANOS

TEOREMA [6.11]

Para qualquer representação unitária U dum grupo separável, localmente compacto G , existe no dual \hat{G} uma única **MEDIDA C/VALOR PROJECCÃO** P tal que

$$\langle U(g)\Psi, \Psi \rangle = \int_{\hat{G}} \hat{g}(\chi) d\langle P_{\chi}\Psi, \Psi \rangle \quad (\forall \Psi \in \mathcal{H}^c)$$

Toda a Medida c/valor Projecção P se obtém assim dum única representação unitária U de G .

A determinação de REPRESENTAÇÕES UNITÁRIAS de G é assim EQUIVALENTE à determinação de MEDIDAS C/VALOR PROJECCÃO em \hat{G} .

– Quando G é **ABELIANO COMPACTO**, \hat{G} é **ABELIANO NUMERÁVEL** e na topologia discreta cada $\{\chi\}$ é um Boreliano. As medidas c/valor projecção constroem-se a partir da identidade

$$P_{\mathcal{B}} = \sum_{\chi \in \mathcal{B}} P_{\{\chi\}} \text{ onde}$$

$$P_{\{\chi\}} = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \bar{\chi}(g) U_g d\mu(g)$$

– Quando $G \simeq (\mathbb{R}, +)$, isto equivale ao Teorema Espectral para operadores Auto-Adjuntos.

EXEMPLO

A **REPRESENTAÇÃO REGULAR** de \hat{G} é a representação no espaço $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$

$$(6-1) \quad (\hat{\mathbf{R}}_{\chi} \hat{\Psi})(\chi') = \hat{\Psi}(\chi'\chi)$$

Dada a correspondência unitária entre $\hat{\Psi} \in \mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$ e a sua **TRANSFORMADA DE FOURIER**

$$(6-2) \quad \Psi(g) = \int_{\hat{G}} \hat{\Psi}(\chi) \hat{g}(\chi) d\hat{\mu}(\chi) \in \mathcal{L}^2(G, \mu)$$

a representação regular (6-1) é equivalente à representação de \hat{G} em $\mathcal{L}^2(G, \mu)$

$$(\mathbf{L}_{\chi} \Psi)(g) = \int_{\hat{G}} (\hat{\mathbf{R}}_{\chi} \hat{\Psi})(\chi') \hat{g}(\chi') d\hat{\mu}(\chi') = \int_{\hat{G}} \hat{\Psi}(\chi'\chi) \hat{g}(\chi') d\hat{\mu}(\chi') = \bar{\chi}(g) \Psi(g)$$

Reciprocamente, a representação regular de G em $\mathcal{L}^2(G, \mu)$ é equivalente, pela Transformada de Fourier, à representação de G em $\mathcal{L}^2(\hat{G}, \hat{\mu})$

$$(\mathbf{L}_g \hat{\Psi})(\chi) = \hat{g}(\chi) \hat{\Psi}(\chi) = \chi(g) \hat{\Psi}(\chi)$$

6.5 Representações Induzidas

DEFINIÇÃO [6.12]

Dada uma acção de um grupo G num espaço de Borel S possuindo uma medida invariante μ , se **NÃO EXISTIR** um boreliano G -invariante $\mathcal{B} \subset S$ tal que

$$\mu(\mathcal{B}) \neq 0 \quad ; \quad \mu(S - \mathcal{B}) \neq 0$$

então a acção e a medida invariante μ dizem-se **ERGÓDICAS** ou **MÉTRICAMENTE TRANSITIVAS** .

- Uma acção **TRANSITIVA** é sempre **ERGÓDICA** porque não existem outros sub-espacos invariantes excepto \emptyset e S .
- Nem todas as acções **ERGÓDICAS** são **TRANSITIVAS** : existem acções ergódicas para as quais todas as órbitas têm medida nula.
- Um **FIBRADO HILBERTIANO** sobre S é uma correspondência $\mathcal{H} : s \mapsto \mathcal{H}_s$ de um espaço hilbertiano separável \mathcal{H}_s a cada $s \in S$. O espaço do fibrado denota-se ${}_S\mathcal{H}^\pi$ onde $\pi({}_S\mathcal{H}^\pi) \sim S$ é o **ESPAÇO BASE** e $\pi^{-1}(s) = \mathcal{H}_s$ as **FIBRAS**.

DEFINIÇÃO [6.13]

Dada uma acção $(g, s) \mapsto s_g$ de um grupo L.C. SEPARÁVEL G num espaço de Borel S com medida invariante μ , designa-se por **REPRESENTAÇÃO REGULAR** a uma representação unitária $\mathbf{U} : G \rightarrow \text{AUT}(\mathcal{L}^2(S, \mu))$ que é sempre possível de construir definindo, $\forall s \in S, g \in G, \Psi \in \mathcal{L}^2(S, \mu)$

$$(\mathbf{U}_g \Psi)(s) = \Psi(s_g)$$

A construção de representações induzidas é uma generalização deste princípio, em que $\mathcal{L}^2(S, \mu)$ é substituído por $\mathcal{L}^2({}_S\mathcal{H}^\pi, \mu)$ onde ${}_S\mathcal{H}^\pi$ é um fibrado hilbertiano sobre S onde G AGE TRANSITIVAMENTE através de

$$(g, {}_s\Psi) \mapsto ({}_{s_g}\Psi)_g \doteq \mathbf{L}_{g^{-1}}^s({}_s\Psi) \equiv {}_{s_g}\Psi; \quad \mathbf{L}_{g^{-1}}^s \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_s, \mathcal{H}_{s_g})$$

Neste caso, se $\Psi : s \rightarrow {}_s\Psi \in \mathcal{H}_s$ for uma **SECÇÃO** de ${}_S\mathcal{H}^\pi$, a **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** pela acção de G em ${}_S\mathcal{H}^\pi$ é

$$\mathbf{U}_g({}_s\Psi) = \mathbf{L}_g^s({}_{s_g}\Psi)$$

onde \mathbf{L}_g^s designa a acção de G em cada \mathcal{H}_s . Esta representação é unitária no conjunto $\mathcal{L}^2({}_S\mathcal{H}^\pi, \mu)$ das

secções de quadrado somável

$$\Psi \in \mathcal{L}^2_{S^{\mathcal{H}^K}}(S, \mu) \iff \int_S \|\Psi\|^2 d\mu(s) < \infty$$

Suponhamos agora que a acção de G em S é **TRANSITIVA**. Seja $s_o \in S$ um ponto qualquer e K_{s_o} o seu sub-grupo de estacionaridade

$$K_{s_o} = \{k \in G : (s_o)_k = s_o\}$$

Para cada $k \in K_{s_o}$,

$$\left(\begin{smallmatrix} \Psi \\ s_o \end{smallmatrix} \right)_k = \mathbf{L}_{k^{-1}}^{s_o} \left(\begin{smallmatrix} \Psi \\ s_o \end{smallmatrix} \right); \quad \mathbf{L}_{k^{-1}}^{s_o} \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_{s_o}, \mathcal{H}_{s_o}), \quad \forall k \in K_{s_o}$$

i.e. \mathbf{L}^{s_o} É UMA REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA de K_{s_o} .

- Todo o G -fibrado hilbertiano sobre um G -espaço de Borel transitivo S está associado a uma representação unitária \mathbf{L}^{s_o} de um sub-grupo K_{s_o} .
- O problema de encontrar G -fibrados hilbertianos sobre um G -espaço de Borel transitivo S é completamente equivalente ao problema de encontrar a mais geral representação unitária \mathbf{L}^{s_o} de um sub-grupo K_{s_o} .
- No caso de G -espaços transitivos S , se existir uma medida μ esta medida invariante é **ÚNICA** a menos de uma constante. Mudando a constante **NÃO MUDA** a classe de equivalência das representações induzidas.

Dado um G -espaço transitivo S com medida invariante μ , existe uma bem definida (classe de equivalência de) Representação Unitária Induzida de G para cada (classe de equivalência de) Representação Unitária de K_{s_o} .

Dada a acção de G em S .

$$(s_o)_g = (s_o)_{g'} \iff g'g^{-1} \in K_{s_o} \implies K_{s_o}g = K_{s_o}g'$$

ou seja, existe uma correspondência bi-unívoca entre os co-conjuntos $[g] = K_{s_o}g$ e pontos $s = (s_o)_g \in S$

$$S \longleftrightarrow K_{s_o} \backslash G$$

Esta correspondência permite definir uma estrutura de espaço de Borel e uma medida invariante $\tilde{\mu}$ em $K_{s_o} \backslash G$ através de

$$d\tilde{\mu}([g]) = d\mu(s_o g)$$

Seja dada uma **REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA** $\mathbf{U}^K : K = K_{s_o} \rightarrow \mathcal{H}^K$. Considere-se o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H}^G = \left\{ \Psi : G \rightarrow \mathcal{H}^K : \Psi(kg) = \mathbf{U}_k^K(\Psi(g)) \quad \& \quad \int_{K_{s_o} \backslash G} \|\Psi(g)\|_{\mathcal{H}^K}^2 d\tilde{\mu}([g]) < \infty; \quad \forall k \in K, \quad g \in G \right\}$$

- O espaço \mathcal{H}^G é invariante para translações à direita:

$$(\mathbf{R}_g \Psi)(g') = \Psi(g'g) \implies (\mathbf{R}_g \Psi)(kg') = \Psi(kg'g) = \mathbf{U}_k^K(\Psi(g'g)) \iff \mathbf{R}_g \Psi \in \mathcal{H}^G$$

– $\|\Psi(g)\|_{\mathcal{H}^K}^2$ é constante em cada co-conjunto $[g] = Kg$.

DEFINIÇÃO [6.14]

A **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** $\mathbf{U}^{G(K)} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}^G)$ de G por \mathbf{U}^K é a representação unitária

$$(\mathbf{U}_g^{G(K)}\Psi)(g') = \Psi(g'g); \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}^G, \quad g \in G$$

Vamos definir a representação induzida de G directamente no espaço de funções $\mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$, onde $S \simeq K \backslash G$, da seguinte forma.

Seja $\mathbf{T} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}^K)$ uma **FUNÇÃO OPERATORIAL** que verifique

– $\mathbf{T}_{kg} = \mathbf{U}_k^K \mathbf{T}_g$;

– $\langle \mathbf{T}_g \psi, \psi' \rangle$ é mensurável para a medida de Haar em G , para todos os pares $\psi, \psi' \in \mathcal{H}^K$ (i.e. \mathbf{T} é fracamente mensurável).

\mathbf{T} não é necessariamente uma representação, embora $\mathbf{T}_g = \mathbf{U}_{k_g}^K$ seja uma possibilidade, onde $g = k_g s_g$ é a decomposição de Mackey associada à identificação $S \simeq K \backslash G$.

Para cada função $\Phi \in \mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$ existe um $\Psi \in \mathcal{H}^G$ determinado por

$$\Psi(g) = \mathbf{T}_g(\Phi(s_g))$$

onde s_g e g se relacionam pela decomposição de Mackey única $g = k_g s_g$. Reciprocamente, para cada $\Psi \in \mathcal{H}^G$ pode associar-se uma função $\Phi \in \mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$ determinada em $g \in G$ e

$$\Phi(s) = \mathbf{T}_{g_s}^{-1} \Psi(g_s)$$

onde g_s se obtém de s por $g_s = ks, \forall k \in K$. Esta definição não depende da escolha de k porque, se $g'_s = k's = k'k^{-1}g_s$,

$$\Phi(s) = \mathbf{T}_{g'_s}^{-1} \Psi(g'_s) = \left(\mathbf{U}_{k'k^{-1}}^K \mathbf{T}_{g_s} \right)^{-1} \mathbf{U}_{k'k^{-1}}^K \Psi(g_s) = \mathbf{T}_{g_s}^{-1} \Psi(g_s)$$

Definindo $\tilde{\mathbf{U}}^{G(K)} : G \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K))$ através de

$$(\mathbf{U}_{g'}^{G(K)}\Psi)(g) = \mathbf{T}_g \left(\tilde{\mathbf{U}}_{g'}^{G(K)} \Phi \right)(s_g)$$

obtemos a

DEFINIÇÃO [6.15]

A expressão da **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** de G por U^K por operadores unitários em $\mathcal{L}^2(S, \mu, \mathcal{H}^K)$ é dada por

$$\left(\tilde{U}_{g'}^{G(K)} \Phi\right)(s) = \mathbf{T}_{g_s}^{-1} \mathbf{T}_{g_s g'}(\Phi(sg'))$$

Existe sempre pelo menos uma medida **QUASI-INVARIANTE** em $\kappa \backslash G$ (μ e $\mu_g : \mathcal{B} \rightarrow \mu(\mathcal{B}g)$ equivalentes). No caso de $S \simeq \kappa \backslash G$ apenas ter medida quasi-invariante, para preservar a unitariedade de $U^{G(K)}$ deve-se alterar a definição anterior para

$$(U_g^{G(K)} \Psi)(g') = \sqrt{\rho_g(g')} \Psi(g'g)$$

onde $\rho_g = \frac{d\mu_g}{d\mu}$ é a derivada de **RADON-NIKODYM** de μ_g relativamente a μ .

A representação induzida $U^{G(K)}$ é independente da medida quasi-invariante escolhida.

TEOREMA DE RECIPROCIDADE DE FROBENIUS

Dada uma representação **UNITÁRIA IRREDUTÍVEL** U^K dum sub-grupo fechado K do grupo separável **COMPACTO** G , a multiplicidade com que uma qualquer representação **UNITÁRIA IRREDUTÍVEL** $U^{(i)}$ de G aparece na decomposição da **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** $U^{G(K)}$ é exactamente igual à multiplicidade com que U^K aparece na decomposição da restrição de $U^{(i)}$ a K .

6.6 Sistemas de Imprimitividade

Dado um sub-grupo fechado K dum grupo G localmente compacto e separável, seja:

- i. $S \simeq \kappa \backslash G$ um Boreliano de G tal que, para **TODO** o $g \in G$, existe uma decomposição **ÚNICA** de g na forma

$$g = k_g s_g; \quad k_g \in K, \quad s_g \in S$$

- ii. $U^K : K \rightarrow \mathcal{H}^K$ uma **REPRESENTAÇÃO UNITÁRIA** de K em \mathcal{H}^K .

- iii. $U^{G(K)} : G \rightarrow \mathcal{H}^G$ a representação de G **INDUZIDA** por K .

- iv. $\mathcal{B} \subset S$ um sub-conjunto Boreliano de S e $\zeta_{\mathcal{B}} : S \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ a função característica do conjunto \mathcal{B} .

DEFINIÇÃO [6.16]

Seja $\mathbf{P} : \text{Borel}(S) \rightarrow \Pi(\mathcal{H}^G)$ a **MEDIDA ESPECTRAL** definida por

$$(\mathbf{P}_{\mathcal{B}}\Psi)(g) \doteq \zeta_{\mathcal{B}}(s_g)\Psi(g), \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}^G$$

A Medida Espectral \mathbf{P} é uma **MEDIDA C/VALOR PROJEÇÃO** que verifica

$$(\mathbf{P}_{\mathcal{B}}\Psi)(kg) = (U_k^K \mathbf{P}_{\mathcal{B}}\Psi)(g), \quad \forall k \in K, \Psi \in \mathcal{H}^G$$

e associa a $U^{G(K)}$ um **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE TRANSITIVO**

$$U_g^{G(K)} \mathbf{P}_{\mathcal{B}} U_{g^{-1}}^{G(K)} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}g^{-1}}$$

NB: O termo **TRANSITIVO** indica que existem suficientes geradores em G para formar um sistema conjugado de operadores de **POSIÇÃO \mathcal{Q}** , para os quais \mathbf{P} forma a medida espectral.

- A toda a representação **INDUZIDA** é possível associar um **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE**, e reciprocamente, uma representação unitária que possua um Sistema de Imprimitividade Transitivo é unitariamente equivalente a uma representação Induzida.

DEMONSTRAÇÃO

\mathbf{P} transforma-se da seguinte forma para a representação induzida $U^{G(K)}$

$$(U_g^{G(K)} \mathbf{P}_{\mathcal{B}} U_{g^{-1}}^{G(K)} \Psi)(g') = (\mathbf{P}_{\mathcal{B}} U_{g^{-1}}^{G(K)} \Psi)(g'g) = \zeta_{\mathcal{B}}(s_{g'g})(U_{g^{-1}}^{G(K)} \Psi)(g'g) = \zeta_{\mathcal{B}}(s_{g'}g)\Psi(g') = (\mathbf{P}_{\mathcal{B}g^{-1}}\Psi)(g')$$

porque $s_{g'g} \in \mathcal{B} \iff s_{g'} \in \mathcal{B}g^{-1}$. Verificamos portanto que $U_g^{G(K)} \mathbf{P}_{\mathcal{B}} U_{g^{-1}}^{G(K)} = \mathbf{P}_{\mathcal{B}g^{-1}}$ é um **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE TRANSITIVO.**■

6.7 Produtos Semi-directos

DEFINIÇÃO [6.17]

Um grupo separável localmente compacto (s.l.c.) G diz-se o **PRODUTO SEMI-DIRECTO** do sub-grupo normal fechado N e o sub-grupo fechado H (e escreve-se $G = N \ltimes H$) se qualquer $g \in G$ se decompuer de **FORMA ÚNICA** num produto $g = nh$, com $n \in N$, $h \in H$.

- Se $G = N \ltimes H \implies N \cap H = \{e\}$;
- $gg' = nhn'h' = n(hn'h^{-1})hh' = n''h'' \implies n'' = n \text{ AD}_h(n') \ ; \ h'' = hh'$.

Reciprocamente,

DEFINIÇÃO [6.18]

Dados dois grupos s.l.c. N e H e uma acção $h \in H \rightarrow \alpha_h \in \text{Aut}(N)$ de H em N , o **PRODUTO SEMI-DIRECTO** $G = N \ltimes H$ é um novo grupo formado pelos pares $g = (n, h) \in N \times H$ com o produto

$$gg' = (n\alpha_h(n'), hh') = g'' \implies n'' = n\alpha_h(n') \ ; \ h'' = hh'$$

- $N \simeq \{g = (n, e)\}_{n \in N}$ e $H \simeq \{g = (e, h)\}_{h \in H}$ são sub-grupos fechados.
- $hnh^{-1} = (e, h)(n, e)(e, h^{-1}) = (\alpha_h(n), h)(e, h^{-1}) = (\alpha_h(n), e) \simeq \alpha_h(n)$
- $G = N \ltimes H$ é localmente compacto na topologia produto se $\alpha_h(n)$ for contínuo nas duas variáveis.
- Como α_h define uma acção de H em N , então $\alpha_h \circ \alpha_{h'} = \alpha_{hh'}$.
- Se $g = (n, h) \implies g^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$

EXEMPLO

i. $N = (\mathbb{R}^d, +)$, $H = GL(d, \mathbb{R})$, $\alpha_h(\mathbf{n}) = h \cdot \mathbf{n}$.

O **GRUPO DE TRANSFORMAÇÕES AFINS** de $\mathbb{R}^d \simeq N \times \{e\}$ é $G = \mathbb{R}^d \ltimes GL(d, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} (gg')(x, e) &= g(g'(x, e)) = g(\mathbf{n}' + h' \cdot \mathbf{x}, h') = \\ &= (\mathbf{n} + h \cdot \mathbf{n}' + hh' \cdot \mathbf{x}, hh') = g''(x, e) \implies \mathbf{n}'' = \mathbf{n} + h \cdot \mathbf{n}' \ ; \ h'' = hh' \end{aligned}$$

ii. O **GRUPO DE POINCARÉ** (ou grupo de Lorentz inhomogéneo) é o produto semi-directo das translações espaço-tempo ($N = (\mathbb{R}^4, +)$) e das transformações de Lorentz ($H = SO(3, 1)$).

iii. O grupo S_3 das permutações de 3 objectos é o produto semidirecto dum grupo cíclico de ordem 3 e dum grupo cíclico de ordem 2: $S_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$.

Se $G = N \rtimes H$, qualquer representação unitária U de G fica determinada pelas suas restrições U^H e U^N porque

$$U_{(n,h)} = U_{(n,e)(e,h)} = U_n^N U_h^H$$

Estas representações verificam

$$(6-3) \quad U_{(n,h)(n',h')} = U_{n\alpha_h(n')}^N U_{hh'}^H \implies U_h^H U_n^N U_{h^{-1}}^H = U_{\alpha_h(n)}^N$$

Esta condição (6-3) torna-se num **SISTEMA DE IMPRIMITIVIDADE** se supusermos que N é **ABELIANO** e fazendo uma decomposição espectral para substituir U^N pela sua **MEDIDA ESPECTRAL**. Aqui \hat{N} é o H -espaço Boreliano para a acção $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_h = \alpha_h^*(\mathcal{X})$ de H em \hat{N} , definida pelo automorfismo dual de α_h

$$\begin{aligned} \alpha_h^* : \hat{N} &\rightarrow \hat{N} \\ \mathcal{X} &\mapsto \alpha_h^*(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \circ \alpha_h \end{aligned}$$

Pelo Teorema Espectral, cada representação unitária de N está associada a uma única **MEDIDA C/VALOR PROJECCÃO P**, em \hat{N} , tal que

$$U_n^N = \int_{\hat{G}} \hat{n}(\chi) dP_\chi$$

U^H verifica (6-1) se e só se a respectiva medida c/valor projecção verifica

$$(6-4) \quad U_h^H P_{\hat{B}} U_{h^{-1}}^H = P_{\hat{B}h^{-1}}$$

porque

$$\begin{aligned} (6-5) \quad U_h^H U_n^N U_{h^{-1}}^H &= \int_{\hat{N}} \hat{n}(\chi) d(U_h^H P_\chi U_{h^{-1}}^H) \\ &= U_{\alpha_h(n)}^N = \int_{\hat{N}} \widehat{\alpha_h(n)}(\chi) dP_\chi = \int_{\hat{N}} \hat{n}(\chi) dP_{\alpha_h^*(\mathcal{X})} \end{aligned}$$

Como os caracteres separam os pontos de N , (6-5) implica (6-4) para qualquer Boreliano $\hat{B} \in \hat{N}$.

Determinar uma representação unitária de G é equivalente a encontrar uma representação unitária U^H de H e um Sistema de Imprimitividade P para U^H e a acção de H no dual \hat{N} .

TEOREMA

Seja \hat{T} o sub-conjunto de \hat{N} que intersecta cada H -órbita em \hat{N} num ponto único. Para cada $\chi \in \hat{T}$, designemos por $H_\chi = \{h \in H : \alpha_h^*(\chi) = \chi\}$ o seu grupo de estacionaridade. Se \mathbf{U}^{H_χ} for uma representação primária de H_χ , então $\chi \mathbf{U}^{H_\chi} : (n, h_\chi) \rightarrow \chi(n) \mathbf{U}_{h_\chi}^{H_\chi}$ é uma representação do sub-grupo $N \times H_\chi$ de G .

Então, a **REPRESENTAÇÃO INDUZIDA** $\mathbf{U}^{G(N \otimes H_\chi)}$ é uma representação de G primária e de tipo transitivo, e é **IRREDUTÍVEL** se \mathbf{U}^{H_χ} o for.

- Uma representação é de tipo transitivo se a classe de medida invariante e ergódica associada à Medida Espectral \mathbf{P} (do sistema de imprimitividade para \mathbf{U}^H e a acção de H em \hat{N}) é transitiva, ou tem medida positiva em qualquer órbita \mathcal{O} de H em \hat{N} .
- Cada órbita é um H -espaço homogéneo e isomorfo ao quociente $\mathcal{O}_\chi = \hat{K}_\chi \backslash \hat{H}$ de H pelo sub-grupo de estacionaridade $\hat{K}_\chi = \{h \in H : \chi h \equiv \alpha_h^*(\chi) = \chi\}$ de $\chi \in \hat{N}$.
- No caso $G = N \times H$ com N **ABELIANO**, todas as representações unitárias **IRREDUTÍVEIS** de G são **INDUZIDAS** por um sub-grupo não trivial de G , e são todas determinadas por:
 - (a) parâmetros que caracterizam uma órbita $\hat{\mathcal{O}}$ de H no dual \hat{N} ;
 - (b) e parâmetros adicionais que caracterizam a representação do sub-grupo de estabilidade da órbita $\hat{\mathcal{O}}$.

EXEMPLO

i. GRUPO EUCLIDEANO]

ii. GRUPO DE POINCARÉ]

No caso do grupo de **POINCARÉ**, o parâmetro que caracteriza a órbita é a **MASSA** e o parâmetro que caracteriza a representação do sub-grupo de estabilidade da órbita é o **SPIN**.

ii. GRUPO DE TRANSLAÇÕES DO PLANO]

$$N = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} : \mathbf{n} = \{x, y\}, \mathbf{n}\mathbf{n}' = \mathbf{n} + \mathbf{n}'\}$$

[GRUPO DE ROTAÇÕES EM TORNO DA ORIGEM]

$$H = \{h \in SO(2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{S}^1 : h = e^{\mathbf{J}\theta}, hh' = e^{\mathbf{J}(\theta+\theta')}\}$$

Aqui $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. O grupo H age em N através de

$$\mathbf{n}h = \mathbf{n} \cdot e^{\mathbf{J}\theta} = \{x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta\}$$

Para cada $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$ existe um caracter de N

$$\chi_{\mathbf{z}}(\mathbf{n}) = e^{i \mathbf{z} \cdot \mathbf{n}} = e^{i(ax + by)}$$

e todos os caracteres de N são desta forma (porque N é abeliano), donde o seu dual é

$$\hat{N} = \{\chi_z, \quad z \in \mathbb{R}^2\} \simeq \mathbb{R}^2$$

Podemos definir uma acção de H em \hat{N} como uma rotação de z

$$(\alpha_{h^{-1}}^* \chi_z)(\mathbf{n}) = \chi_z(\mathbf{n} \cdot h^{-1}) = \chi_{z \cdot h}(\mathbf{n})$$

pelo que χ_z e $\chi_{z'}$ estão na mesma órbita se e só se $|z| = |z'|$. O conjunto Boreliano que parametriza as órbitas é aqui

$$\hat{T} = \{z_0 = \{r, 0\}, r \geq 0\} \simeq \mathbb{R}$$

e, para cada $r > 0$, os sub-grupos de estabilidade de cada órbita são todos $H_{\chi_{z_0}} = \{e\}$.

Então $N \ltimes H_{\chi_r} \simeq N$ e a representação $\mathbf{U}^{H_{\chi_r}}$ é trivial, pelo que

$$\mathbf{U}^{N \ltimes H_{\chi_r}} = \mathbf{U}^N = \chi_r.$$

Assim, as representações induzidas de G por cada órbita O_{χ_r} são as representações induzidas pelos caracteres de N e como tal são irredutíveis e todas inequivalentes. O espaço suporte de cada uma destas representações é $\mathcal{L}^2(H \backslash N \backslash G, \mu, \mathbb{C})$ de dimensão infinita.

6.8 Problemas da Parte IV

PROBLEMA IV-1: SIMETRIAS DA RECTA REAL

Considere o grupo G de transformações da recta real \mathbb{R} consituído por:

- i) operações que translacção da origem.
- ii) operações de mudança de escala.
- iii) operações de reflexão relativamente à origem.

Verifique se G é um grupo de Lie e construa representações de dimensão 1, 2 e 3.

Determine medidas de Haar invariantes à esquerda e à direita e verifique se o grupo é unimodular.

PROBLEMA IV-2: GRUPO $GL_2(\mathbb{R})$

Construa medidas de Haar para $GL_2(\mathbb{R})$ e verifique se este grupo é unimodular.

PROBLEMA IV-3: GRUPO SU_2

Mostre que qualquer elemento de $g \in SU_2$ se pode escrever como $g = \alpha_0 \sigma_0 + i \sum_{\kappa=1}^3 \alpha_\kappa \sigma_\kappa$ onde $\sigma_0 = Id$, σ_κ forma uma base da respectiva álgebra de Lie e $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ com $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA IV-4: GRUPO $SU_{1,1}$

Determine a equação que os elementos g de $SU_{1,1}$, sub-grupo de $SL_2(\mathbb{C})$, devem satisfazer e determine uma forma de escrever os seus elementos em termos de parâmetros β_i numa base adequada de elementos σ_i da álgebra de Lie respectiva. Faça o mesmo para o sub-grupo $SL_2(\mathbb{R})$ de $SL_2(\mathbb{C})$.

PROBLEMA IV-5: TRANSFORMAÇÕES CANÓNICAS

Represente as equações canónicas da mecânica clássica

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k} = -\dot{p}_k \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k} = \dot{q}_k \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

onde $\mathcal{H}(q_k, p_k)$ é o hamiltoniano dum sistema clássico, num espaço de fase \mathbb{R}^{2n} com coordenadas $\{x_k = q_k, x_{k+n} = p_k\}$. Determine o grupo de simetrias máximo das equações canónicas e mostre que a evolução das variáveis canónicas é expresso por grupos-a-um-parâmetro de transformações simpléticas.

PROBLEMA IV-6: GRUPO DE HEISENBERG

Mostre que o grupo de Lie associado às relações de comutação canónicas da mecânica quântica tem a seguinte lei de composição:

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, r)(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, s) = (\mathfrak{x} + \mathfrak{u}, \mathfrak{y} + \mathfrak{v}, e^{-i\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{u}} r s)$$

com $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathbb{R}^n$ e $r, s \in S^1$, e que é nilpotente.

PROBLEMA IV-7: GRUPO DE ROTAÇÕES $SO_3(\mathbb{R})$

Considere o grupo das rotações $SO_3(\mathbb{R})$ do espaço Euclideano \mathbb{R}^3 .

(i) – Mostre que qualquer elemento $g \in SO_3(\mathbb{R})$ se pode representar na forma

$$g(\varphi, \vartheta, \psi) = R_z(\varphi)R_y(\vartheta)R_z(\psi)$$

com $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\vartheta \in [0, \pi]$ e $\psi \in [0, 2\pi]$ onde

$$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_y(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

representam rotações à volta do eixo z e y , respectivamente.

- (ii) – Mostre que $SO_3(\mathbb{R})$ é difeomorfo à esfera $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ com pontos antipodais identificados. Para isso mostre que $g \in SO_3(\mathbb{R})$ pode ser parametrizado por matrizes 3×3 ortogonais R com componentes

$$R_{ij}(\theta, \mathbf{n}) = \cos(\theta)\delta_{ij} + (1 - \cos(\theta))n_i n_j - \sin(\theta) \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} n_k \quad (ij = 1, 2, 3)$$

onde $|\mathbf{n}|^2 = \sum_{k=1}^3 n_k^2 = 1$ e $\theta \in [0, \pi]$.

- (iii) – Existe medida de Haar em $SO_3(\mathbb{R})$? Justifique.
 (iv) – Mostre que, em termos da parametrização (4.1), uma medida invariante em $SO_3(\mathbb{R})$ se escreve

$$d\mu(g) = d\mu(\varphi, \vartheta, \psi) = \frac{1}{8\pi^2} \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta d\psi$$

e em termos da parametrização (4.2) é

$$d\mu(g) = d\mu(\theta, \mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi^2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta d\mathbf{n}$$

PROBLEMA IV-8: GRUPO DE GALILEU

O grupo de Galileu é o grupo de transformações do espaço de fases estendido $M = \mathbb{R}^8$

$$\begin{cases} \mathbf{q} \rightarrow \Lambda \cdot \mathbf{q} + \mathbf{a}t + \mathbf{b} \\ \mathbf{p} \rightarrow \Lambda \cdot \mathbf{p} + m\mathbf{a} \\ t \rightarrow t + c \\ \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + \mathbf{a} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} |\mathbf{a}|^2 \end{cases} \quad \text{onde } \Lambda \cdot \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \cdot \Lambda = \mathbf{1}; \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3; \quad c \in \mathbb{R}$$

- (i) – Construa os geradores infinitesimais \vec{X} do grupo de Galileu assim parametrizado, e determine as respectivas funções hamiltonianas, i.e. as funções $f_{\mathbb{X}} \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}^2(M)$ que verificam

$$X^i = \dot{q}^i = \partial_{p_i} f_{\mathbb{X}} \quad , \quad X^{i+4} = \dot{p}_i = -\partial_{q^i} f_{\mathbb{X}} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

- (ii) – Mostre que os geradores infinitesimais \vec{X} formam uma álgebra de Lie, determine as constantes de estrutura e compare-as com as dos correspondentes parêntesis de Poisson das suas funções hamiltonianas $f_{\mathbb{X}}$.

PROBLEMA IV-9: REPRESENTAÇÃO ADJUNTA, FORMA DE KILLING

Os campos de vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (y u^2 - x v) \partial_x - (x u + 2 y v) \partial_y + 2 u v \partial_u + \left(\frac{3}{2} v^2 - \frac{2}{3} u^3\right) \partial_v & \mathbf{e}_3 &= \partial_v \\ \mathbf{e}_2 &= x \partial_x + 2 u \partial_u + 3 v \partial_v & \mathbf{e}_4 &= x \partial_x + y \partial_y \end{aligned}$$

aparecem no estudo das simetrias da dinâmica $\begin{cases} \partial_y u = \partial_x v \\ \partial_y v = -u \partial_x u \end{cases}$ do escoamento ultrasónico de um gás bi-dimensional no regime estacionário.

- (i) – Mostre que o espaço \mathfrak{G} gerado por vectores da forma $\vec{X} = X^i e_i$ é uma álgebra de Lie e determine os grupos-a-um-parâmetro que geram.
- (ii) – Usando agora a base $f_1 = e_1, f_2 = 2e_4 - e_2, f_3 = e_3, f_4 = e_4$ calcule a **REPRESENTAÇÃO ADJUNTA** de \mathfrak{G} , $\text{ad} : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}$, $\text{ad}_X Y = [X, Y]$, e determine a **FORMA DE KILLING** $K(X, Y)$ que lhe está associada. Verifique se \mathfrak{G} é semi-simples.
- (iii) – Finalmente, construa a representação adjunta do grupo de automorfismos internos de \mathfrak{G} , i.e. o grupo gerado pelos automorfismos $\Phi_t^X(Y_0)$, associados a cada elemento $X \in \mathfrak{G}$, e definidos pela solução da equação

$$\frac{dY}{dt} = [Y, X] \quad (Y(0) = Y_0)$$

e mostre que $K(X, X)$ é um invariante para este grupo.

SOLUÇÃO IV-9

Para determinar o fluxo do campo

$$\vec{X}_1 = (y u^2 - x v) \partial_x - (x u + 2 y v) \partial_y + 2 u v \partial_u + \left(\frac{3}{2} v^2 - \frac{2}{3} u^3 \right) \partial_v$$

teríamos que resolver o sistema de equações ordinárias

$$(6-6) \quad \frac{dx}{dt} = (y u^2 - x v) \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = -(x u + 2 y v) \quad ; \quad \frac{du}{dt} = 2 u v \quad ; \quad \frac{dv}{dt} = \left(\frac{3}{2} v^2 - \frac{2}{3} u^3 \right)$$

O subsistema constituído pelas últimas duas é autónomo, e do sistema de Pfaff que lhe é associado

$$\frac{dt}{1} = \frac{du}{2 u v} = \frac{dv}{\frac{3}{2} v^2 - \frac{2}{3} u^3}$$

define uma constante de movimento k_1 envolvendo apenas u e v . De facto

$$\left(\frac{3}{2} v^2 - \frac{2}{3} u^3 \right) du = 2 u v dv.$$

Multiplicando ambos os lados por $u^{-5/2}$ obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2} v^2 u^{-5/2} - \frac{2}{3} u^{1/2} \right) du &= 2 v u^{-3/2} dv \\ \Leftrightarrow \left(2 v u^{-3/2} dv - \frac{3}{2} v^2 u^{-5/2} du \right) + \frac{2}{3} u^{1/2} du &= 0 \\ \Leftrightarrow d \left(\frac{v^2}{u^{3/2}} \right) + d \left(\frac{4}{9} u^{3/2} \right) &= 0, \\ \Leftrightarrow d \left(\frac{v^2}{u^{3/2}} + \frac{4}{9} u^{3/2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

pelo que

$$\frac{v^2}{u^{3/2}} + \frac{4}{9} u^{3/2} = k_1$$

Pondo $\zeta = \frac{2}{3}u^{3/2}$ e $c_1 = \frac{3}{2}k_1$ obtemos $v^2 = \zeta(c_1 - \zeta)$. Multiplicando a penúltima equação em (6-6) por $3u^{1/2}$ obtemos uma equação para ζ :

$$\frac{d\zeta}{dt} = \pm 3\zeta^{\frac{3}{2}}\sqrt{c_1 - \zeta}$$

portanto

$$\zeta(t) = \frac{c_1}{1 + (\frac{3}{2}c_1)^2 (c_2 \pm t)^2}$$

A solução temporal geral é, rescalando $\frac{3}{2}c_1 \rightarrow c_1$

$$v(t) = \frac{2}{3} \frac{c_1^2 (c_2 \pm t)}{1 + c_1^2 (c_2 \pm t)^2} \quad ; \quad u(t) = \left(\frac{c_1}{1 + c_1^2 (c_2 \pm t)^2} \right)^{2/3}$$

Definindo $\xi = \frac{y}{x^2}$ e $\eta = uy$ então

$$x^3 \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\eta}{\xi} - 2\eta^2 \quad ; \quad x^3 \frac{d\eta}{dt} = -\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2$$

e

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 d\xi &= \left(-\frac{\eta}{\xi} - 2\eta^2\right) d\eta \\ \Leftrightarrow -\frac{\eta}{\xi^2} d\xi + \frac{1}{\xi} d\eta + d\eta^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow d\left(\eta\left(\eta + \frac{1}{\xi}\right)\right) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\eta\left(\eta + \frac{1}{\xi}\right) = ux^2 + u^2y^2 = c_3$$

Agora calculando

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$$

obtemos, usando $\lambda = \frac{y}{x}$ e as equações em (6-6)

$$\frac{d\lambda}{dt} = -u(1 + u\lambda^2) - v\lambda$$

e multiplicando por $2u\lambda$, chega-se a

$$\begin{aligned} 2u\lambda \frac{d\lambda}{dt} + \lambda^2 \frac{du}{dt} &= -2u^2\lambda(1 + u\lambda^2) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(u\lambda^2) &= -2u^2\lambda(1 + u\lambda^2) \end{aligned}$$

Obtemos assim uma equação para $\varphi = u\lambda^2$ envolvendo $u^{3/2} = \zeta(t)$ que já é conhecido:

$$\frac{1}{\varphi^{1/2}(1 + \varphi)} \frac{d\varphi}{dt} = -2\sigma \zeta(t)$$

onde $\sigma = \text{sign}(\lambda)$. Esta expressão tem solução

$$\varphi(t) = \tan^2\left(c_3 - \frac{2}{3}\sigma \tan^{-1}(c_1(c_2 \pm t))\right)$$

donde se conclui

$$\frac{y}{x} = \lambda(t) = \sigma \sqrt{\frac{\varphi(t)}{u(t)}}$$

A partir de $ux^2 + u^2y^2 = c_4$ obtém-se

$$x(t)^2 = \frac{c_4}{u(t)(1 + u(t)\lambda(t)^2)} \quad ; \quad y(t)^2 = \frac{c_4\lambda(t)^2}{u(t)(1 + u(t)\lambda(t)^2)}$$

PROBLEMA IV-10: CAMPOS INVARIANTES

Seja H_c o grupo $H_c = \{ \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 : h^2 > -c, \mathbf{h}\mathbf{h}' = (1 + \frac{h^2}{c})\mathbf{h}' + \mathbf{h} \}$

- (2.1) – Mostre que H_c é de facto um grupo de Lie.
- (2.2) – Determine todos os grupos-um-parâmetro de H_c .
- (2.3) – Escreva a expressão geral de um campo $\vec{X} \in \mathcal{V}_{H_c}$ invariante à esquerda. Compare com a expressão geral de um campo $\vec{Y} \in \mathcal{V}_{H_c}$ invariante à direita.
- (2.4) – Determine uma medida invariante sobre H_c . Existirá uma medida de Haar em H_c ? Justifique.

PROBLEMA IV-11: GERADORES DE MOVIMENTO

Considere o movimento dum carro numa superfície plana. Designe por θ o ângulo entre o eixo longitudinal do carro e a direcção das rodas da frente. Determine o espaço de configuração Q do carro.

- (i) – Mostre que os “geradores infinitesimais” de pequenos movimentos na direcção indicada pelas rodas dianteiras são campos da forma

$$\vec{Y} = \sin(\theta)\partial_\varphi + \cos(\varphi + \theta)\partial_x + \sin(\varphi + \theta)\partial_y$$

onde (x, y) são coordenadas cartesianas no plano e φ uma coordenada angular especificando a direcção de movimento do carro.

- (ii) – Que tipo de “movimento” gera o campo $\vec{X} = \partial_\theta$?
- (iii) – Calcule os comutadores $\mathbf{Z} = [\vec{X}, \vec{Y}]$ e $\mathbf{W} = [\mathbf{Z}, \vec{Y}]$. Dê uma interpretação física dos movimentos que eles geram.

PROBLEMA IV-12: GRUPO EUCLIDEANO

O grupo Euclideo E_n é um produto **SEMI-DIRECTO** $E_n \simeq H \ltimes N$ com

- $H = SO_n(\mathbb{R}) := \{ \mathbf{A} \in GL_n(\mathbb{R}) : \mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{1} ; \text{DET}(\mathbf{A}) = 1 \}$, i.e. as rotações em \mathbb{R}^n que deixam o volume invariante;
- $N = T^n \equiv (\mathbb{R}^n, +)$, i.e. o grupo abeliano das translações de \mathbb{R}^n .

Como conjunto $E_n \equiv SO_n(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ e o produto de elementos em E_n verifica a definição de produto semi-directo:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{a})(\mathbf{B}, \mathbf{b}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a})$$

- (i) – Determine a dimensão do grupo E_n
- (ii) – Mostre que o grupo Euclidiano E_2 pode ser representado pelo grupo matricial

$$g(x, y, \theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x \cos(\theta) & \sin(\theta) & \\ y - \sin(\theta) \cos(\theta) & & \end{pmatrix}$$

- (iii) – Determine as medidas de Haar invariantes à esquerda e à direita em E_2 .

PROBLEMA IV-13: TRANSFORMAÇÕES FRACIONÁRIAS

Considere o grupo G de transformações lineares fracionárias da recta \mathbb{R} , i.e. transformações do tipo

$$x \mapsto \frac{a + bx}{1 + cx} \quad \text{com } a, b, c \in \mathbb{R}$$

- (i) – Determine a sua álgebra de Lie \mathfrak{G} e construa todos os grupos-a-um-parâmetro de uma base de \mathfrak{G} . Mostre que o produto destes grupos-a-um parâmetro forma um grupo (dito canónico de segunda espécie) cuja álgebra de Lie é também \mathfrak{G} , e portanto localmente identifica-se com G .
- (iii) – Deduza daqui a forma geral duma transformação do grupo canónico de segunda espécie, e mostre que o produto de grupo que daí se deduz é equivalente ao original do grupo G . Determine a medida de Haar sobre G .

PROBLEMA IV-14: LOTKE-VOLTERRA

Considere as equações de Lotke-Volterra

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by) x \\ \frac{dy}{dt} = -(c + dx) y \end{cases}$$

onde (a, b, c, d) são constantes.

- i. Determine uma variedade simpléctica (M, ω) na qual estas são as equações de Hamilton dum sistema conservativo.
- ii. Estude a possibilidade de encontrar um segundo gerador de transformações canónicas que forme uma álgebra de Lie com o campo hamiltoniano destas equações.

PROBLEMA IV-15: GRUPO LOCAL

Seja $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear sobre um espaço de Banach \mathcal{B} .

(i) – Indique em que condições a aplicação

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} &\rightarrow \mathfrak{B} \\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') &\mapsto \phi(\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = (1 + \alpha(\mathfrak{q}))\mathfrak{q}' + \mathfrak{q}\end{aligned}$$

define um grupo de Lie **LOCAL**.

(ii) – Nas condições da alínea (i), denote-se $L_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{q}) = \phi(\mathfrak{a}, \mathfrak{q})$ a translacção à esquerda por $\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}$. Mostre que a aplicação derivada de $L_{\mathfrak{a}}$ é

$$DL_{\mathfrak{a}}|_{\mathfrak{q}} = \left(\frac{1 + \alpha(L_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{q}))}{1 + \alpha(\mathfrak{q})} \right) \mathbf{1}_{\mathfrak{B}}$$

(iii) – Determine os grupos-a-um-parâmetro passando pela origem deste grupo de Lie local (\mathfrak{B}, ϕ) .

(iv) – Escreva a lei de multiplicação $\phi : \mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ usando coordenadas canónicas, i.e. numa carta local (\mathcal{U}, η) em que os grupos-a-um-parâmetro passando pela origem têm a expressão $\eta(\mathfrak{a}(t)) = t\vec{X}$.

(v) – Determine a estrutura da álgebra de Lie de (\mathfrak{B}, ϕ) .

PROBLEMA IV-16: SISTEMA DE PFAFF

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dy^\alpha}{dx^i} = A_i^\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad i = 1, \dots, p; \quad \alpha = 1, \dots, q$$

com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$. Mostre que este sistema admite soluções $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$ para qualquer condição inicial $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0$ **SSE**

$$\partial_{x^k} A_j^\alpha - \partial_{x^j} A_k^\alpha + A_k^\beta \partial_{y^\beta} A_j^\alpha - A_j^\beta \partial_{y^\beta} A_k^\alpha = 0$$

SUGESTÃO: Transforme o sistema inicial num sistema de Pfaff equivalente e estude este.

PROBLEMA IV-17: IMAGENS PELA TANGENTE, DERIVADAS DE LIE

Seja $f : \mathbb{R}^2|_{y>0} \rightarrow \mathbb{R}^2|_{x<0, x^2<y}$ a aplicação $f(x, y) = (y e^x, y^2 e^{2x} + y)$ e \mathbf{T} o tensor

$$\mathbf{T} = xy \, dx \otimes \partial_x - dy \otimes \partial_x + y \, dx \otimes \partial_y \in \mathcal{T}_1^1(\mathbb{R}^2)$$

(i) – Mostre que f é um difeomorfismo.

(ii) – Determine a imagem-pela-tangente $f_* \mathbf{T}$ e a pré-imagem $f^* \mathbf{T}$ de \mathbf{T} .

(iii) – Para $\vec{X} = y \partial_x + x^2 \partial_y$, calcule as derivadas de Lie $\mathcal{L}_X \mathbf{T}$, $\mathcal{L}_X f^* \mathbf{T}$ e $\mathcal{L}_{f^* X} \mathbf{T}$.

PROBLEMA IV-18: VARIEDADE QUOCIENTE

O grupo aditivo dos inteiros \mathbb{Z} age em \mathbb{R}^2 como um grupo de transformações **DESCONTÍNUO** através de

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (n, \mathbf{q}) &\mapsto \phi_n(\mathbf{q}) = n \mathbf{e}_1 + \mathbf{q} \end{aligned}$$

com $\mathbf{q} = q^1 \mathbf{e}_1 + q^2 \mathbf{e}_2$.

(i) – Mostre que \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} tem a estrutura de uma variedade quociente de dimensão 2 construindo-lhe um atlas diferenciável. Dê uma interpretação geométrica a esta variedade.

(ii) – Se a acção de \mathbb{Z} em \mathbb{R}^2 fosse

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (n, \mathbf{q}) &\mapsto \psi_n(\mathbf{q}) = n \mathbf{e}_1 + ((-1)^n - 1) q^2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{q} \end{aligned}$$

mostre que a variedade quociente \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} para esta acção não é orientável, i.e. o jacobiano das funções $\eta_i \circ \eta_j^{-1}$ não tem um sinal constante em $\eta_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ para cartas (\mathcal{U}_i, η_i) , (\mathcal{U}_j, η_j) tais que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$

PROBLEMA IV-19: RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO CANÓNICAS

Mostre que o grupo de Lie G associado com as relações de comutação canónicas da Mecânica Quântica tem a seguinte lei de composição

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda)(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \lambda') = (\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} + \mathbf{y}', e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}'} \lambda \lambda')$$

com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{S}^1$ ($\hbar = 1$). Mostre que G é nilpotente. Determine as representações adjunta e co-adjunta e as respectivas órbitas de G .

PROBLEMA IV-20: LEVANTAMENTO DE CARACTERES DE GRUPOS FINITOS

Conhecendo um caracter χ_0 do grupo quociente G/N de um grupo G por um seu sub-grupo normal N , pode-se construir um caracter χ de G , "**LEVANTADO**" de G/N , pondo

$$\chi(g) := \chi_0(Ng)$$

onde Ng representa o **CO-CONJUNTO** de $g \in G$ no espaço quociente G/N . Use esta construção para determinar a tabela de caracteres do grupo **DICÍCLICO** G definido pelas relações

$$a^6 = 1 \quad ; \quad a^3 = (ab)^2 = b^2$$

SUGESTÃO Mostre que o comutador (ou grupo derivado de G) $G' := \{x^{-1}y^{-1}xy : x, y \in G\}$ é sempre um sub-grupo normal de G .

PROBLEMA IV-21: CAMPOS HAMILTONIANOS

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^∞ . Designando por \mathcal{L}_X a derivação de Lie segundo \vec{X} e ι_Y o produto interior por \vec{Y} , mostre que

$$\mathcal{L}_X \circ \iota_Y - \iota_Y \circ \mathcal{L}_X = \iota_{[X,Y]}$$

- (i) – Se M for dotada de uma estrutura simplética ω , mostre que a correspondência $\vec{X}^b = \iota_X \omega$ é um isomorfismo de módulos.
- (ii) – Designando de **HAMILTONIANO** um campo \vec{X} que verifique $\mathcal{L}_X \omega = 0$, mostre que \vec{X} é hamiltoniano se e só se \vec{X}^b for fechada.
- (iii) – Usando a notação $\natural = b^{-1}$ para designar o isomorfismo inverso, mostre que o **COMUTADOR**

$$[\alpha, \beta] = [\alpha^\natural, \beta^\natural]^\natural$$

de duas 1-formas diferenciais fechadas é uma forma exacta.

PROBLEMA IV-22: PFAFF E FROBENIUS

Numa variedade diferenciável M de dimensão 4, considere os campos vectoriais num ponto m de coordenadas locais $\mathfrak{x} = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$

$$\vec{X} = e^{-2x^1} \partial_{x^1} - e^{-2x^2} \partial_{x^2} + e^{-2x^4} \partial_{x^4}$$

$$\vec{Y} = \partial_{x^1} + \partial_{x^2} + \lambda(\mathfrak{x}) \partial_{x^3} + \mu(\mathfrak{x}) \partial_{x^4}$$

- (i) – Escreva o sistema de Pfaff correspondente ao campo de planos gerados por \vec{X} e \vec{Y} .
- (ii) – Explícite a condição de Frobenius para que este sistema de Pfaff seja completamente integrável. Determine funções λ e μ que satisfaçam essa condição.
- (iii) – Tente determinar as superfícies integrais desta distribuição.

PROBLEMA IV-23: MAURER-CARTAN

Considere a álgebra de Lie \mathcal{G} dada pelas relações de comutação

$$[\vec{X}_1, \vec{X}_2] = \vec{X}_1 - \vec{X}_2$$

Usando o método de integração das equações de Maurer-Cartan por via de **COORDENADAS CANÓNICAS DE PRIMEIRA ESPÉCIE**, DEDUZA a função de composição $\Lambda_g g'$ que define o produto no grupo de Lie local G de que \mathcal{G} é a álgebra de Lie. Construa em G uma medida de invariante e verifique se G é **UNIMODULAR**.

PROBLEMA IV-24: DISTRIBUIÇÃO INTEGRÁVEL

Mostre que os campos vectoriais em \mathbb{R}^3

$$\vec{X}_1 = -y \partial_x + x \partial_y$$

$$\vec{X}_2 = 2z (x \partial_x + y \partial_y) + (1 - x^2 - y^2 + z^2) \partial_z$$

geram um **DISTRIBUIÇÃO INTEGRÁVEL** e determine todas as superfícies integrais (folhas) da respectiva folheação.

PROBLEMA IV-25: REPRESENTAÇÃO AFIM

Mostre que \mathbb{R}^3 dotado da operação

$$xy = x + y + (x \times y) \cdot \mathbb{k}$$

onde $\mathbb{k} \in \mathbb{R}^3$ está fixo, é um grupo de Lie, e que a acção-à-esquerda natural é uma **REPRESENTAÇÃO AFIM** em \mathbb{R}^3 . Determine as constantes de estrutura da sua álgebra de Lie para uma base conveniente.

PROBLEMA IV-26: GERADORES INFINITESIMAIS

Os elementos da álgebra de Lie de um grupo de Lie G designam-se também "**GERADORES INFINITESIMAIS**" das transformações do grupo. Justifique esta designação. Construa os geradores infinitesimais para as translações e rotações em \mathbb{R}^2 , e determine as constantes de estrutura da respectiva álgebra de Lie. Use o método de Maurer-Cartan para construir o grupo correspondente à extensão central desta álgebra de Lie (i.e. adicionando um elemento ao centro da álgebra).

PROBLEMA IV-27: GRUPO DE GALILEU

O grupo de Galileu é o grupo de transformações do espaço de fases estendido

$$\begin{cases} \mathbf{q} \rightarrow \Lambda \cdot \mathbf{q} + \mathbf{a}t + \mathbf{b} \\ \mathbf{p} \rightarrow \Lambda \cdot \mathbf{p} + m\mathbf{a} \\ t \rightarrow t + c \\ \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} + \frac{m}{2} |\mathbf{a}|^2 \end{cases} \quad \text{onde } \Lambda \cdot \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \cdot \Lambda = \mathbf{1}; \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3; \quad c \in \mathbb{R}$$

Construa os geradores infinitesimais do grupo de Galileu assim parametrizado, e as respectivas funções hamiltonianas. Compare as relações de comutação dos geradores infinitesimais com os correspondentes parêntesis de Poisson das suas funções hamiltonianas.

PROBLEMA IV-28: REPRESENTAÇÃO ADJUNTA E CO-ADJUNTA

Determine um grupo G gerado pelas relações de comutação

$$[\xi_1, \xi_2] = \frac{1}{c} \xi_1$$

sendo c uma constante real. Determine as medidas invariantes de G . Construa as representações **ADJUNTA** e **CO-ADJUNTA** de G e determine as respectivas órbitas em ambas as representações.

PROBLEMA IV-29: RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO CANÓNICA

Mostre que o grupo de Lie G associado com as relações de comutação canónicas da Mecânica Quântica tem a seguinte lei de composição

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \sigma)(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \sigma') = (\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} + \mathbf{y}', e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}'} \sigma \sigma')$$

com $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{S}^1$ ($\hbar = 1$). Mostre que G é nilpotente. Determine as representações adjunta e co-adjunta e as respectivas órbitas de G .

PROBLEMA IV-30: ORTOGONALIZAÇÃO DE GRAM-SCHMIDT

Uma (pseudo)-métrica numa variedade M é um campo tensorial $\mathbf{g} \in \mathcal{T}_2(M)$, simétrico e não-degenerado, i.e. em cada ponto $p \in M$, \mathbf{g} define um funcional bi-linear simétrico

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_p : T_p M \times T_p M &\rightarrow \mathbf{R} \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto \mathbf{g}_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}_p(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

que verifica

$$\iota_{\mathbf{u}} \mathbf{g}_p \equiv 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Numa carta local de M , \mathbf{g} pode escrever-se

$$\mathbf{g} = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_i g_{ii} (dx^i)^2 + 2 \sum_{i < j} g_{ij} dx^i dx^j$$

onde g_{ij} são as componentes de uma matriz simétrica de determinante não-nulo $\det(g_{ij}) \neq 0$ e

$$dx^i dx^j = \frac{1}{2} (dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i)$$

O teorema de Gram-Schmidt afirma que, em cada ponto $p \in M$, qualquer (pseudo) métrica \mathbf{g} admite bases (pseudo) ortonormais, i.e. bases $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de $T_p M$ tais que

$$\mathbf{g}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \eta_{ij}$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ é uma matrix diagonal com assinatura $r - s$

$$\boldsymbol{\eta} = \text{diag} \left(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_r, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_s \right)$$

- i. Mostre que uma base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ de $T_p M$ que diagonaliza \mathbf{g} não é única. O conjunto de transformações $\Lambda \in GL(n, \mathbf{R})$ que relacionam duas bases (pseudo) ortonormais quaisquer forma o grupo (pseudo) ortogonal $O(r, s)$.

Escreva a equação que caracteriza as transformações $\Lambda \in O(r, s)$.

- ii. Mostre que existe sempre uma vizinhança U de p em que se podem encontrar n campos vectoriais $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ que diagonalizem \mathbf{g} , i.e.

$$\mathbf{g} = \eta_{ij} \boldsymbol{\beta}^i \otimes \boldsymbol{\beta}^j$$

onde $(\boldsymbol{\beta}^1, \boldsymbol{\beta}^2, \dots, \boldsymbol{\beta}^n)$ são as 1-formas duais de $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$. Mostre também que, no entanto, não existem sempre **COORDENADAS LOCAIS** χ^i para as quais se possa escrever

$$\mathbf{g} = \eta_{ij} d\chi^i \otimes d\chi^j$$

Numa base ortonormal é natural escrever a **FORMA DE VOLUME** como

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\beta}^1 \wedge \boldsymbol{\beta}^2 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{\beta}^n$$

já que se espera que o volume do cubo gerado por vectores ortogonais de comprimento unidade seja 1, i.e. $\Omega(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n) = 1$.

Mostre que numa base coordenada em que $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$, a expressão para a forma de volume Ω é

$$\Omega = \sqrt{|\det(g_{ij})|} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

- iii. A existência de uma (pseudo) métrica g em TM induz **CANÓNICAMENTE** uma (pseudo) métrica \bar{g} em T^*M , que é a que verifica

$$\bar{g}(\beta^i, \beta^j) := \eta_{ij}$$

sobre a base $(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$ de T^*M , **DUAL** duma base **ORTONORMAL** $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n)$ de TM . Verifique que numa base coordenada, \bar{g} se escreve

$$\bar{g} = g^{ij} \partial_{x^i} \otimes \partial_{x^j}$$

com $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$.

- iv. A (pseudo) métrica g define ainda um isomorfismo **CANÓNICO**, em cada ponto $p \in M$, entre os espaços vectoriais $T_p M$ e $T_p^* M$ dado por

$$\begin{aligned} \flat : T_p M &\longrightarrow T_p^* M \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x}^\flat := \iota_{\mathbf{x}} g_p \end{aligned}$$

Explicita o isomorfismo \flat e o seu inverso $\sharp : T_p^* M \longrightarrow T_p M$ numa base arbitrária e numa base ortonormal. (Note que \flat e \sharp não são mais do que as operações de **BAIXAR** e **LEVANTAR** o índice das componentes do vector ou 1-forma sobre que actuam. O produto tensorial das operações \flat , \sharp e **1** (identidade) é o que se usa para baixar ou levantar índices de $\binom{p}{q}$ -tensores.

- v. Uma **ISOMETRIA** é uma aplicação $f : M \rightarrow N$, entre variedades dotadas de métricas g_M e g_N , que preserva a métrica, i.e.

$$f^* g_N \equiv g_M$$

ou, o que é o mesmo,

$$g_N(f_* \mathbf{X}, f_* \mathbf{Y})|_{f(p)} = g_M(\mathbf{X}, \mathbf{Y})|_p$$

para quaisquer $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in T_p M$ e $p \in \text{dom}(f)$.

(Por exemplo, uma **TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ** é uma isometria da métrica de Minkowski em \mathbf{R}^4 , ou seja a métrica de assinatura 1 - 3, $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Uma translação em \mathbf{R}^4 será também uma isometria para η ?)

- vi. Determine a métrica g_c numa vizinhança da origem de \mathbb{R}^3 para a qual a mudança de coordenadas cartesianas para cilíndricas constitui uma isometria com a métrica euclídeana em \mathbb{R}^3 . E para coordenadas esféricas ?

Verifique que os isomorfismos \flat e \sharp são isometrias relativamente às métricas g e \bar{g} em TM e T^*M

PROBLEMA IV-31: SÍMBOLOS DE EDDINGTON

Os símbolos ϵ de Eddington são objectos definidos por

$$\epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } \binom{1 \ 2 \ \dots \ n}{i_1 i_2 \dots i_n} \text{ for uma permutação par.} \\ -1 & \text{se } \binom{1 \ 2 \ \dots \ n}{i_1 i_2 \dots i_n} \text{ for uma permutação ímpar.} \\ 0 & \text{doutro forma.} \end{cases}$$

Seja M uma variedade diferenciável com uma (pseudo)métrica g de assinatura $r - s$, i.e. uma variedade (pseudo) Riemanniana.

- i. Escrevendo $|g| = |\det(g_{ij})| > 0$, mostre que

$$e_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sqrt{|g|} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad ; \quad e^{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$$

são n -tensores antisimétricos relacionados por

$$e_{i_1 i_2 \dots i_n} = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \dots g_{i_n j_n} e^{j_1 j_2 \dots j_n}$$

- ii. O operador ***** (**ESTRELA**) **DE HODGE** define-se como o resultado da operação \sharp sobre a contracção (representada aqui pelo símbolo \lrcorner) com o tensor

$$e = e^{i_1 i_2 \dots i_n} \partial_{x^{i_1}} \otimes \partial_{x^{i_2}} \otimes \dots \otimes \partial_{x^{i_n}}$$

das p -formas $\phi \in \wedge^p(M)$

$$\phi = \frac{1}{p!} \phi_{j_1 j_2 \dots j_p} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_p}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} * : \wedge^p(M) &\rightarrow \wedge^{n-p}(M) \\ \phi &\mapsto * \phi = (\phi \lrcorner e)^\sharp \end{aligned}$$

Explicite $* \phi$ numa base arbitrária $(\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^n)$ de T^*M e calcule $** \phi$ para qualquer $\phi \in \wedge^p(M)$.

Verifique que $*$ de Hodge estabelece um **ISOMORFISMO CANÓNICO** entre $\wedge^p(M)$ e $\wedge^{n-p}(M)$.

- iii. Mostre que a operação de **CO-DERIVAÇÃO**

$$\begin{aligned} \delta : \wedge^p(M) &\rightarrow \wedge^{p-1}(M) \\ \phi &\mapsto \delta \phi = (-1)^{n(p+1)+s+1} * d(* \phi) \end{aligned}$$

é a operação **ADJUNTA** da derivada exterior d em relação ao **PRODUTO ESCALAR** de p -formas

$$(\phi, \psi) := \int_M \phi \wedge * \psi$$

i.e.

$$(d\phi, \psi) = (\phi, \delta\psi)$$

(suponha que ϕ e ψ têm suportes compactos).

Escreva as expressões $\delta\phi$ em coordenadas locais para $\phi \in \wedge^p(M)$, $p = 0, 1, \dots$ sendo $\dim(M) = 3$. Verifique que $\delta^2 \equiv 0$.

iv. Mostre que o operador diferencial de 2^a ordem (designado operador de **LAPLACE-DERHAM**)

$$\Delta := (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d$$

é **POSITIVO**(ou seja $(\phi, \Delta\phi) \geq 0$) e que uma p - forma é **HARMÓNICA**(i.e. $\Delta\phi = 0$) se e só se for simultâneamente **FECHADA**($d\phi = 0$) e **CO-FECHADA**($\delta\phi = 0$).

Explicita Δf , em coordenadas locais, para $f \in \wedge^0(M)$. Tente justificar por que se designa Δ o operador de:

– **LAPLACE-BELTRAMI** no caso em que g é positiva definida;

– **D'ALAMBERT** no caso em que a assinatura de g é $1 - s$.

v. Se Ω designar a forma de volume e $X \in \mathcal{V}(M)$ um campo de vectores em M , dê o significado geométrico do produto interno $\iota_X \Omega$. A **DIVERGÊNCIA** dum campo de vectores X define-se usualmente como o escalar $\text{div}(X)$ que figura na identidade

$$\int_M \text{div}(X) \Omega \equiv \int_{\partial M} \iota_X \Omega$$

Deduz a expressão de $\text{div}(X)$. Explicita para um sistema de coordenadas locais.

PARTE V

APLICAÇÕES

CAPÍTULO 7

GRUPOS EM FÍSICA

Contents

7.1 Exemplos	173
Simetrias da Equação de Ondas	173
Simetrias duma equação não-linear de Schrödinger	174
Fibrado de Referenciais do Hiperbolóide	180
Estatística quântica: Função de Partição Rotacional \mathcal{Z}_{rot}	189
7.2 Tópicos propostos	194
Quebra espontânea de Simetria	194
Tabela Periódica e Teoria de Grupos	195
Regras de Selecção em Mecânica Quântica	195
Simetrias dinâmicas de Sistemas Relativistas e não-Relativistas	195
Algebras de Lie e Mecânica Quântica	195
Simetrias de Equações Diferenciais e Leis de Conservação	195
As representações Irreduzíveis do Grupo de Poincaré	195
Paridade e Física: Inversões de Espaço e Tempo	195
Equações de Onda Relativistas	196
Formas Invariantes em Grupos de Lie e Equações de Maurer-Cartan	196

7.1 Exemplos

1 – SIMETRIAS DA EQUAÇÃO DE ONDAS

- (i)– Estude as definições e exemplos dos Capítulos 2.3 (Prolongation) e 2.4 (Calculation of Symmetry Groups) do livro **APPLICATIONS OF LIE GROUPS TO DIFFERENTIAL EQUATIONS** do *Olver, P.J.* (Springer-Verlag). (Use a notação $u_x = \partial_x u(t, x)$, $u_{xx} = \partial_{xx}^2 u(t, x)$, etc.)

- (ii)– Compare as simetrias da equação de ondas bi-dimensional com as do sistema de

primeira ordem equivalente

$$u_{tt} = u_{xx} \iff \begin{cases} u_t = v \\ u_x = w \\ v_t = w_x \\ v_x = w_t \end{cases}$$

(iii)– Mostre que o grupo de simetrias da equação de ondas bi-dimensional acima indicado é localmente isomorfo ao grupo $SO(3, 2)$ de isometrias da métrica

$$ds^2 = (dz^1)^2 + (dz^2)^2 + (dz^3)^2 - (dz^4)^2 - (dz^5)^2$$

em \mathbb{R}^5 (exceptuando a simetria de sobreposição de soluções $u \rightarrow \lambda u + \alpha(t, x)$ onde $\alpha(t, x)$ é outra solução desta equação.)

II – SIMETRIAS DUMA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE SCHRÖDINGER

A determinação de soluções para a equação não-linear de Schrödinger

$$(7-1) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 |\Psi|}{|\Psi|} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

pode ser feita sem perda de generalidade fazendo a substituição

$$(7-2) \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = e^{\alpha(\mathbf{x}, t) + i\phi(\mathbf{x}, t)}$$

com α, ϕ reais. Assim sendo $|\Psi(\mathbf{x}, t)| = e^{\alpha(\mathbf{x}, t)}$ e

$$(7-3) \quad \nabla^2 |\Psi| = (\nabla^2 \alpha + (\nabla \alpha)^2) |\Psi|$$

Note-se também que

$$(7-4) \quad \nabla^2 \Psi = \nabla \cdot (\nabla(\alpha + i\phi)\Psi) = (\nabla^2 \alpha + (\nabla \alpha)^2 - (\nabla \phi)^2 + i(\nabla^2 \phi + 2\nabla \alpha \cdot \nabla \phi))\Psi$$

e

$$(7-5) \quad \partial_t \Psi = (\partial_t \alpha + i\partial_t \phi)\Psi$$

Substituindo na equação (7-1) e separando a parte real da imaginária obtém-se

$$(7-6) \quad \begin{cases} \hbar \partial_t \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \phi)^2 \\ \hbar \partial_t \alpha = -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 \phi + 2\nabla \alpha \cdot \nabla \phi) \end{cases}$$

Para maior clareza vamos substituir t, \mathbf{x} por $t' = \frac{m}{\hbar} t$ e $\mathbf{x}' = \frac{m}{\hbar} \mathbf{x}$. As últimas equações escrevem-se então nestas coordenadas

$$(7-7) \quad \begin{cases} -2\phi_{t'} = \phi_{x'}^2 \\ -2\alpha_{t'} = \phi_{x'x'} + 2\alpha_{x'}\phi_{x'} \end{cases}$$

onde de futuro deixaremos de usar os apóstrofes.

Procuramos agora soluções da equação autónoma $-2\phi_t = \phi_x^2$. Utilizando os métodos dos prolongamentos vamos obter o maior número possível de simetrias da sub-variedade de soluções $S \subset \mathbb{R}^5$, definida como o lugar geométrico dos pontos que verificam a equação algébrica

$$(7-8) \quad F(t, x, \phi, \phi_x, \phi_t) = \phi_x^2 + 2\phi_t = 0$$

Os campos de vectores tangentes à variedade $\phi = \phi(x, t)$ que é uma solução desta equação são da forma

$$(7-9) \quad \vec{X} = X^t(t, x, \phi) \partial_t + X^x(t, x, \phi) \partial_x + Z(t, x, \phi) \partial_\phi$$

e têm como primeiro prolongamento

$$(7-10) \quad \vec{X}^{(1)} = \vec{X} + Z^t(t, x, \phi, \phi_x, \phi_t) \partial_{\phi_t} + Z^x(t, x, \phi, \phi_x, \phi_t) \partial_{\phi_x}$$

o qual deve verificar $\vec{X}^{(1)}F = 0$, ou seja

$$(7-11) \quad Z^x \phi_x + Z^t = 0$$

Aqui

$$(7-12) \quad \begin{aligned} Z^x &= \partial_x Z + \phi_x \partial_\phi Z - \phi_t \cdot (\partial_x X^t + \phi_x \partial_\phi X^t) - \phi_x \cdot (\partial_x X^x + \phi_x \partial_\phi X^x) \\ Z^t &= \partial_t Z + \phi_t \partial_\phi Z - \phi_t \cdot (\partial_t X^t + \phi_t \partial_\phi X^t) - \phi_x \cdot (\partial_t X^x + \phi_t \partial_\phi X^x) \end{aligned}$$

Substituindo agora sempre que possível ϕ_t por $-\frac{1}{2}\phi_x^2$ obtemos explicitamente:

$$(7-13) \quad X^{(1)}F = 2Z_t + 2(Z_x - X_t^x) \phi_x + (X_t^t - 2X_x^x + Z_\phi) \phi_x^2 + (X_x^t - X_\phi^x) \phi_x^3 + \frac{1}{2}X_\phi^t \phi_x^4 = 0$$

Esta equação polinomial de grau 4 em ϕ_x tem coeficientes que devem anular-se separadamente dando origem a um sistema de equações às derivadas parciais:

$$(7-14) \quad \begin{cases} Z_t = 0 \\ Z_x = X_t^x \\ Z_\phi = 2X_x^x - X_t^t \\ X_x^t = X_\phi^x \\ X_\phi^t = 0 \end{cases}$$

A solução deste conjunto de equações é

$$\begin{cases} X^t = a_1 + 2t a_4 + x a_5 + t a_7 + x^2 a_8 + 2t^2 a_9 + 2t x a_{10} \\ X^x = a_2 + x a_4 + \phi a_5 + t a_6 + 2\phi x a_8 + 2t x a_9 + (2\phi t + x^2) a_{10} \\ Z^\phi = a_3 + x a_6 - \phi a_7 + 2\phi^2 a_8 + x^2 a_9 + 2\phi x a_{10} \end{cases}$$

onde os a_i são constantes.

Estas equações definem uma àlgebra de Lie (com dimensão 10) de simetrias da equação $\phi_x^2 = -2\phi_t$ cujos geradores infinitesimais são:

$$(7-15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{X}_1 = \partial_t \\ \vec{X}_2 = \partial_x \\ \vec{X}_3 = \partial_\phi \\ \vec{X}_4 = 2t \partial_t + x \partial_x \\ \vec{X}_5 = x \partial_t + \phi \partial_x \\ \vec{X}_6 = t \partial_x + x \partial_\phi \\ \vec{X}_7 = t \partial_t - \phi \partial_\phi \\ \vec{X}_8 = x^2 \partial_t + 2\phi x \partial_x + 2\phi^2 \partial_\phi \\ \vec{X}_9 = 2t^2 \partial_t + 2tx \partial_x + x^2 \partial_\phi \\ \vec{X}_{10} = 2tx \partial_t + (x^2 + 2t\phi) \partial_x + 2x\phi \partial_\phi \end{array} \right.$$

Estes por sua vez determinam os seguintes grupos a um parâmetro ϵ :

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon^1(t, x, \phi) &= (t + \epsilon, x, \phi) \\ \Phi_\epsilon^2(t, x, \phi) &= (t, x + \epsilon, \phi) \\ \Phi_\epsilon^3(t, x, \phi) &= (t, x, \phi + \epsilon) \\ \Phi_\epsilon^4(t, x, \phi) &= (t e^{2\epsilon}, x e^\epsilon, \phi) \\ \Phi_\epsilon^5(t, x, \phi) &= (t + \epsilon(x + \frac{1}{2}\epsilon\phi), x + \epsilon\phi, \phi) \\ \Phi_\epsilon^6(t, x, \phi) &= (t, x + \epsilon t, \phi + \epsilon(x + \frac{1}{2}\epsilon t)) \\ \Phi_\epsilon^7(t, x, \phi) &= (e^{t\epsilon}, x, e^{-\epsilon}\phi) \\ \Phi_\epsilon^8(t, x, \phi) &= (t + \frac{\epsilon x^2}{1-2\epsilon\phi}, \frac{x}{1-2\epsilon\phi}, \frac{\phi}{1-2\epsilon\phi}) \\ \Phi_\epsilon^9(t, x, \phi) &= (\frac{t}{1-2\epsilon t}, \frac{x}{1-2\epsilon t}, \phi + \frac{\epsilon x^2}{1-2\epsilon t}) \\ \Phi_\epsilon^{10}(t, x, \phi) &= (\frac{t}{(1-\epsilon x)^2 - 2\epsilon^2 t \phi}, \frac{x(1-\epsilon x) + 2\epsilon t \phi}{(1-\epsilon x)^2 - 2\epsilon^2 t \phi}, \frac{\phi}{(1-\epsilon x)^2 - 2\epsilon^2 t \phi}) \end{aligned}$$

Usando estes podemos gerar soluções novas e não-triviais a partir de outras já conhecidas, mesmo que triviais. Por exemplo, a partir de $\phi = c$, que de facto é uma solução, obtém-se

$$(7-16) \quad \Phi_\epsilon^i(t, \mathbf{x}, c) = (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\phi})$$

O grafo resultante $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}(t, \mathbf{x}, c) = f(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})$ é outra solução da equação original. No caso de se poder eliminar a acção do grupo sobre ϕ , tanto t como \mathbf{x} podem ser unívocamente associados a funções $t = t(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})$ e assim a nova solução seria imediatamente calculada como

$$(7-17) \quad \tilde{\phi} = \tilde{\phi}(t(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}), \mathbf{x}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})) = f(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}})$$

É de notar que nenhum dos grupos a um parâmetro $\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \Phi^5$ ou Φ^7 muda a trivialidade da solução $\phi = c$. Contudo já $\Phi_{-c}^3 \circ \Phi_{\kappa}^6$ gera uma solução

$$(7-18) \quad \tilde{\phi} = \kappa\tilde{x} - \frac{1}{2}\kappa^2\tilde{t}$$

De facto, a partir de Φ_{κ}^6 percebe-se que

$$(7-19) \quad \begin{cases} \tilde{t} = t \\ \tilde{x} = x + \kappa t \\ \tilde{\phi} = c + \kappa(x + \frac{1}{2}\kappa t) \end{cases}$$

donde se obtém

$$(7-20) \quad \begin{cases} t = \tilde{t} \\ x = \tilde{x} - \kappa\tilde{t} \\ \tilde{\phi} = c + \kappa(\tilde{x} - \frac{1}{2}\kappa\tilde{t}) \end{cases}$$

Portanto $\phi = \kappa x - \omega t$ with $\omega = \frac{1}{2}\kappa^2$ é uma solução. Da mesma forma se pode gerar uma nova solução com $\Phi_{-c}^3 \circ \Phi_{\alpha}^9$

$$(7-21) \quad \tilde{\phi} = \frac{\alpha\tilde{x}^2}{1 + 2\alpha\tilde{t}}$$

Por fim, Φ_{σ}^{10} gera soluções semelhantes a estas e adicionalmente gera uma nova solução interessante a partir de $\phi = \kappa x - \frac{1}{2}\kappa^2 t$. Para a obter é necessário inverter o sistema de equações algébricas $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{\phi}) = \Phi_{\sigma}^{10}(t, x, \kappa x - \frac{1}{2}\kappa^2 t)$ o que produz

$$(7-22) \quad \begin{cases} t = \frac{\tilde{t}(1 + 2\sigma\kappa\tilde{t})}{(1 + \sigma(\kappa\tilde{t} + \tilde{x}))^2} \\ x = \frac{\tilde{x} + (\kappa^2\tilde{t}^2 + \tilde{x}^2)\sigma}{(1 + \sigma(\kappa\tilde{t} + \tilde{x}))^2} \\ \tilde{\phi} = \frac{\kappa\tilde{x} - \frac{1}{2}\kappa^2\tilde{t} + \sigma\kappa\tilde{x}^2}{1 + 2\sigma\kappa\tilde{t}} \end{cases}$$

Passemos agora à determinação das simetrias da segunda equação em (7-7) de forma a obter o grupo de simetrias da equação não-linear de Schrödinger (7-1). Sendo uma equação de segunda ordem é necessário usar prolongamentos de segunda ordem para obter campos que deixem invariante a função

$$G(t, \mathbf{x}, \phi^{(2)}, \alpha^{(2)}) = \phi_{,xx} + 2\alpha_{,x}\phi_{,x} + 2\alpha_t = 0$$

em que $\phi^{(2)} = \{\phi, \phi_t, \phi_x, \phi_{tt}, \phi_{tx}, \phi_{xx}\}$ e de forma semelhante para $\alpha^{(2)}$. Vamos assim substituir (7-9) e (7-10) por

$$(7-23) \quad \vec{X} = X^t(t, \mathbf{x}, \phi, \alpha) \partial_t + X^x(t, \mathbf{x}, \phi, \alpha) \partial_x + Z(t, \mathbf{x}, \phi, \alpha) \partial_\phi + W(t, \mathbf{x}, \phi, \alpha) \partial_\alpha$$

cujo prolongamento de primeira ordem será

$$(7-24) \quad \begin{aligned} \vec{X}^{(1)} = \vec{X} &+ Z^t(t, \mathbf{x}, \phi^{(1)}, \alpha^{(1)}) \partial_{\phi_t} + Z^x(t, \mathbf{x}, \phi^{(1)}, \alpha^{(1)}) \partial_{\phi_x} \\ &+ W^t(t, \mathbf{x}, \phi^{(1)}, \alpha^{(1)}) \partial_{\alpha_t} + W^x(t, \mathbf{x}, \phi^{(1)}, \alpha^{(1)}) \partial_{\alpha_x} \end{aligned}$$

e o de segunda ordem

$$(7-25) \quad \begin{aligned} \vec{X}^{(2)} = \vec{X}^{(1)} &+ Z^{tt}(t, \mathbf{x}, \phi^{(2)}, \alpha^{(2)}) \partial_{\phi_{tt}} + Z^{tx}(t, \mathbf{x}, \phi^{(2)}, \alpha^{(2)}) \partial_{\phi_{tx}} + Z^{xx}(t, \mathbf{x}, \phi^{(2)}, \alpha^{(2)}) \partial_{\phi_{xx}} \\ &+ W^{tt}(t, \mathbf{x}, \phi^{(2)}, \alpha^{(2)}) \partial_{\alpha_{tt}} + W^{tx}(t, \mathbf{x}, \phi^{(2)}, \alpha^{(2)}) \partial_{\alpha_{tx}} + W^{xx}(t, \mathbf{x}, \phi^{(2)}, \alpha^{(2)}) \partial_{\alpha_{xx}} \end{aligned}$$

Pese embora o facto de que estas expressões depressa se tornam demasiado extensas, é possível automatizar facilmente estes cálculos usando um programa de manipulação simbólica adequado. Obtém-se assim

$$(7-26) \quad \vec{X}^{(2)}G = Z^{xx} + 2W^t + 2Z^x\alpha_x + 2W^x\phi_x = 0$$

Nas expressões obtidas deve-se substituir $\phi_t = -\frac{1}{2}\phi_x^2$ and $\alpha_t = -\frac{1}{2}\phi_{xx} - \phi_x\alpha_x$ gerando assim as equações que completam as obtidas em (7-14)

$$(7-27) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_\alpha^t = 0 \\ X_\alpha^x = 0 \\ Z_\alpha = 0 \\ W_\alpha = 0 \\ W_t = -\frac{1}{2}X_{tx}^x \\ W_x = \frac{1}{2}X_{xx}^x - X_t^x\phi \\ W_\phi = -\frac{1}{2}X_{x\phi}^x \end{array} \right.$$

A integração destas equações não oferece dificuldades, e pode-se verificar que, à parte a introdução de um gerador de transformações de escala, apenas os últimos três campos podem contribuir para aumentar a álgebra de Lie de simetrias, a saber:

$$(7-28) \quad \begin{aligned} \vec{X}_0 &= \partial_\alpha \\ \vec{X}_8 &= x^2 \partial_t + 2\phi x \partial_x + 2\phi^2 \partial_\phi - \phi \partial_\alpha \\ \vec{X}_9 &= 2t^2 \partial_t + 2tx \partial_x + x^2 \partial_\phi - t \partial_\alpha \\ \vec{X}_{10} &= 2tx \partial_t + (x^2 + 2t\phi) \partial_x + 2x\phi \partial_\phi - x \partial_\alpha \end{aligned}$$

Os seus fluxos são, respectivamente:

$$\begin{aligned}\Phi_\epsilon^0(t, x, \phi) &= \left\{ t, x, \phi, \alpha + \epsilon \right\} \\ \Phi_\epsilon^8(t, x, \phi) &= \left\{ t + \frac{\epsilon x^2}{1-2\epsilon\phi}, \frac{x}{1-2\epsilon\phi}, \frac{\phi}{1-2\epsilon\phi}, \alpha + \log(\sqrt{1-2\epsilon\phi}) \right\} \\ \Phi_\epsilon^9(t, x, \phi) &= \left\{ \frac{t}{1-2\epsilon t}, \frac{x}{1-2\epsilon t}, \phi + \frac{\epsilon x^2}{1-2\epsilon t}, \alpha + \log(\sqrt{1-2\epsilon t}) \right\} \\ \Phi_\epsilon^{10}(t, x, \phi) &= \left\{ \frac{t}{(1-\epsilon x)^2 - 2\epsilon^2 t \phi}, \frac{x(1-\epsilon x) + 2\epsilon t \phi}{(1-\epsilon x)^2 - 2\epsilon^2 t \phi}, \frac{\phi}{(1-\epsilon x)^2 - 2\epsilon^2 t \phi}, \alpha + \log(\sqrt{(1-\epsilon x)^2 - 2\epsilon^2 t \phi}) \right\}\end{aligned}$$

Pode-se agora determinar a solução gerada pelas novas simetrias Φ_σ^{10} a partir da solução em onda plana ($\phi = \kappa x - \omega t$ com $\omega = \frac{1}{2}\kappa^2$). Esta é dada por (7-22) e ainda por

$$(7-29) \quad \tilde{\alpha} = \alpha + \log\left(\frac{\sqrt{1+2\sigma\kappa\tilde{t}}}{1+\sigma(\kappa\tilde{t}+\tilde{x})}\right)$$

onde α representa qualquer solução inicial da equação

$$(7-30) \quad -\alpha_t = \kappa\alpha_x$$

a qual resulta da substituição de $\phi = \kappa x - \omega t$ na segunda equação de (7-7). Estas soluções devem portanto ser da forma $\alpha = f(x - \kappa t)$ para qualquer função $f(x)$ que especifica a amplitude inicial da onda. Passando agora para o sistema de coordenadas transformado $\{\tilde{t}, \tilde{x}\}$, obter-se-á

$$(7-31) \quad \begin{cases} \tilde{\phi} = \frac{\kappa\tilde{x} - \frac{1}{2}\kappa^2\tilde{t} + \sigma\kappa\tilde{x}^2}{1+2\sigma\kappa\tilde{t}} \\ \tilde{\alpha} = f\left(\frac{\tilde{x} - \kappa\tilde{t}}{1+\sigma(\kappa\tilde{t}+\tilde{x})}\right) + \log\left(\frac{\sqrt{1+2\sigma\kappa\tilde{t}}}{1+\sigma(\kappa\tilde{t}+\tilde{x})}\right) \end{cases}$$

Uma solução possível $\Psi(t, \mathbf{x})$ da equação não-linear de Schrödinger (7-1) descrevendo uma partícula livre no sentido clássico (ou seja $V = 0$) pode ser

$$(7-32) \quad \Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{\sqrt{1+2\sigma\kappa t}}{1+\sigma(\kappa t+x)} F\left(\frac{x-\kappa t}{1+\sigma(\kappa t+x)}\right) e^{i\frac{\kappa x - \frac{1}{2}\kappa^2 t + \sigma\kappa x^2}{1+2\sigma\kappa t}}$$

Note-se que para $\sigma = 0$ obtém-se novamente a solução de onda plana se $F(s) = c$, ou uma onda de forma fixa propagando-se com uma velocidade $v = k$ e frequência $\omega = \frac{1}{2}k^2$. Isto é impossível de acontecer com a tradicional equação de Schrödinger que, por ser linear, não consegue manter a forma inicial de um pacote de ondas e exhibe dispersão à medida que a onda se propaga livremente (ou seja, não existem estados coerentes livres).

Uma análise pormenorizada da expressão (7-32) revela que a maioria destas soluções (em particular aquelas que são finitas) são dispersivas ao propagar-se. Poderia isto ser uma manifestação das condições fronteira que afectam a propagação da partícula? O físico e príncipe francês Louis de Broglie interpretou a existência do potencial quântico $\frac{\nabla^2|\Psi|}{|\Psi|}$ como a consequência da existência de obstáculos à propagação da partícula (ou seja condições fronteira) e não tanto como uma espécie de barreira de potencial.

Como curiosidade, quais as soluções de (7-1) que anulam o potencial quântico? Para isso acontecer é necessário que

$$(7-33) \quad \alpha_{xx} = -\alpha_x^2$$

ou seja, tipicamente

$$(7-34) \quad \alpha(x, t) = a(t) + \log(b(t) + x)$$

III – FIBRADO DE REFERENCIAIS DO HIPERBOLÓIDE

(i)– Estude as definições e exemplos do Capítulo 7 (Invariant forms on Lie Groups) do livro **LIE GROUPS AND ALGEBRAS WITH APPLICATIONS TO PHYSICS, GEOMETRY AND MECHANICS** de *Sattinger & Weaver*(Springer-Verlag), bem como as notas da cadeira sobre o MÉTODO DOS REFERENCIAIS MÓVEIS.

(ii)– Considere \mathbb{R}^3 com uma métrica

$$ds^2 = \frac{1}{2}g_{ij}dx^i \otimes dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Mostre que o FIBRADO DE REFERENCIAIS(frame bundle) do hiperbolóide

$$H = \{r : g(r, r) = -1, \quad \forall r \in \mathbb{R}^3\}$$

é o grupo $SO(2, 1)$

(iii)– Determine a álgebra de Lie deste grupo, as suas formas invariantes e medidas de Haar.

(iv)– Determine as equações de estrutura para H e mostre que é uma variedade com curvatura Gaussiana -1.

(v)– Determine a (pseudo)-métrica \hat{g} induzida em H pela métrica g dada, e estude os seus campos de Killing $\mathcal{L}_X \hat{g} = 0$.

SOLUÇÃO

Vamos mostrar que uma representação de $SO(2, 1)$ em $\text{Aut}(\mathbb{R}^3)$ deve obedecer a constrangimentos específicos. Escrevendo os elementos de $SO(2, 1)$ como matrizes

$$(7-35) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d}^\top & b \end{pmatrix}$$

com \mathbf{A} uma matriz 2×2 , \mathbf{c} e \mathbf{d} vectores bi-dimensionais e b um escalar. A condição de simetria significa $g(\Lambda \mathbb{X}_i, \Lambda \mathbb{X}_j) = g(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j)$ ou seja

$$(7-36) \quad \Lambda^\top g \Lambda = g \implies \begin{pmatrix} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}^\top & \mathbf{A}^\top \mathbf{c} - b \mathbf{d} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{A} - b \mathbf{d}^\top & \mathbf{c}^\top \mathbf{c} - b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & -1 \end{pmatrix}$$

o que resulta nas três equações

$$(7-37) \quad \begin{cases} \mathbf{A}^\top \mathbf{A} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}^\top = \mathbf{1} \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{c} - b \mathbf{d} = \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{c} - b^2 = -1 \end{cases}$$

As componentes c e b de $\Lambda \in SO(2, 1)$ determinam pontos em H , porque

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{c} - b^2 = -1.$$

O produto de dois elementos de $SO(2, 1)$ dá uma acção deste grupo sobre H :

$$(7-38) \quad \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d}^\top & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_o & \mathbf{x} \\ \mathbf{d}_o^\top & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{A}_o + \mathbf{c} \otimes \mathbf{d}_o^\top & \mathbf{A}\mathbf{x} + z\mathbf{c} \\ \mathbf{d}^\top \mathbf{A}_o + b\mathbf{d}_o^\top & \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + z b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{d}_1 & z_1 \end{pmatrix}$$

onde identificámos \mathbf{c}_o com $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e b_o com z por questão de clareza. Como é fácil de ver, o novo ponto $\{\mathbf{x}_1, z_1\}$ referenciado por esta matriz obedece igualmente ao constrangimento

$$\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_1 - z_1^2 = -1 \iff x^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

o que o coloca em H .

Ora como um referencial ortonormado em TH para a métrica induzida \tilde{g} em H é o mesmo que um par de vectores pseudo-ortonormados em \mathbb{R}^3 para g , basta-nos agora verificar que cada transformação $\Lambda \in SO(2, 1)$ transforma vectores $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$, tangentes a H e pseudo-ortonormados em \mathbb{R}^3 , em vectores ainda tangentes a H (e que obviamente continuam pseudo-ortonormados pela definição do grupo $SO(2, 1)$).

Como qualquer ponto $\{\mathbf{x}, z\}$ de H deve obedecer ao constrangimento $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{1 + \mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$, um vector tangente a H deve ter a forma

$$(7-39) \quad \mathbb{X} = X \partial_x + Y \partial_y + \frac{xX+yY}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \partial_z = \mathbf{u} \cdot \partial_{\mathbf{x}} + v \partial_z$$

onde, de acordo com a prática anterior, agrupámos componentes

$$(7-40) \quad \mathbf{u} = \{X, Y\} \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{z} \mathbf{x}^\top \mathbf{u}$$

A acção de Λ em $\mathbb{X} \in TH$ produz o novo vector

$$(7-41) \quad \Lambda \mathbb{X} = (\mathbf{A} \mathbf{u} + v \mathbf{c}) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + (\mathbf{d}^\top \mathbf{u} + v b) \cdot \partial_z = \left(\mathbf{A} \mathbf{u} + \frac{1}{z} (\mathbf{x}^\top \mathbf{u}) \mathbf{c} \right) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{d}^\top \mathbf{u} + \frac{b}{z} \mathbf{x}^\top \mathbf{u} \right) \cdot \partial_z$$

e para que este vector seja ainda tangente a H em $\{\mathbf{x}_1, z_1\}$ é necessário que seja da forma (7-40), ou seja $v_1 = \frac{1}{z_1} \mathbf{x}_1^\top \mathbf{u}_1$, o que significa

$$(7-42) \quad \left(\mathbf{d}^\top \mathbf{u} + \frac{b}{z} \mathbf{x}^\top \mathbf{u} \right) = \frac{1}{z_1} (\mathbf{A} \mathbf{x} + z \mathbf{c})^\top \left(\mathbf{A} \mathbf{u} + \frac{1}{z} (\mathbf{x}^\top \mathbf{u}) \mathbf{c} \right)$$

Substituindo aqui os constrangimentos impostos por (7-37)

$$(7-43) \quad \begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{A}^\top = \mathbf{1} + \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{A}^\top \mathbf{c} = b \mathbf{d} \\ \mathbf{c}^\top \mathbf{c} = b^2 - 1 \end{cases}$$

obtemos para o segundo lado de **(7-42)**

$$\begin{aligned}
 (7-44) \quad & \frac{1}{z_1} (\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{u} + z \mathbf{c}^\top \mathbf{A} \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{z z_1} (\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{c} + z \mathbf{c}^\top \mathbf{c}) = \\
 & = \frac{1}{z_1} (\mathbf{x}^\top \mathbf{u} + \mathbf{x}^\top \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}^\top \mathbf{u} + b z \mathbf{d}^\top \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{z z_1} (b \mathbf{x}^\top \mathbf{d} + b^2 z - z) \\
 & = \frac{1}{z_1} (\mathbf{x}^\top \mathbf{d} + b z) \mathbf{d}^\top \mathbf{u} + \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{z z_1} (\mathbf{x}^\top \mathbf{d} + b z) b \\
 & = \mathbf{d}^\top \mathbf{u} + \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{u}}{z} b
 \end{aligned}$$

já que $z_1 = \mathbf{x}^\top \mathbf{d} + b z = \mathbf{d}^\top \mathbf{x} + b z$.

Mostrámos assim que o vector $\Lambda \mathbb{X} \in TH$ quando $\mathbb{X} \in TH$ e $\Lambda \in SO(2, 1)$. Mais ainda, o produto em $SO(2, 1)$ corresponde a uma transformação do fibrado de referenciais sobre H , porque transporta um triplete $\{p, \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2\}$, constituído por um ponto $p = \{\mathbf{x}, z\} \in H$ e dois vectores $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in TH$ ortogonais formando um referencial ortonormado sobre p , noutro triplete de tais objectos.

Finalmente, podemos ver que cada par de vectores pseudo-ortogonais $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in TH$ define elementos \mathbf{A} e \mathbf{d} duma transformação $\Lambda \in SO(2, 1)$, i.e. elementos que obedecem aos primeiros constrangimentos **(7-43)**. De facto, explicitando as condições de pseudo-ortogonalidade destes vectores

$$(7-45) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1 - v_1^2 = 1 \\ \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 - v_1 v_2 = 0 \\ \mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2 - v_2^2 = 1 \end{cases}$$

e pondo

$$(7-46) \quad \mathbf{A} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] \quad ; \quad \mathbf{d}^\top = [v_1 \quad v_2]$$

obtém-se

$$(7-47) \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{A} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^\top \\ \mathbf{u}_2^\top \end{bmatrix} [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2] - \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \otimes [v_1 \quad v_2] = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1 - v_1^2 & \mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_2 - v_1 v_2 \\ \mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_1 - v_2 v_1 & \mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2 - v_2^2 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

Por fim, para vectores tangentes no ponto $p = \{\mathbf{c}, b\}$, tendo em conta **(7-40)**

$$(7-48) \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{A} - b \mathbf{d}^\top = [\mathbf{c}^\top \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{c}^\top \mathbf{u}_2] - [b v_1 \quad b v_2] = \mathbf{0}$$

Note-se que o par $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ só depende de um parâmetro θ . De facto, pondo em geral

$$(7-49) \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha = \tanh^{-1} \left(\frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{e}_\theta}{z} \right)$$

é possível escrever, de acordo com a condição de normalização **(7-45)**

$$(7-50) \quad \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \cosh(\alpha) \mathbf{e}_\theta & ; & v_1 = \sinh(\alpha) \\ \mathbf{u}_2 = \cosh(\tilde{\alpha}) \mathbf{e}_{\tilde{\theta}} & ; & v_2 = \sinh(\tilde{\alpha}) \end{cases}$$

e da ortogonalidade resulta

$$(7-51) \quad \mathbf{e}_{\tilde{\theta}}^\top \left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^\top}{z^2} \right) \mathbf{e}_\theta = 0$$

o que determina $e_{\tilde{\theta}}$ como o vector ortogonal a e_{θ} relativamente à "métrica" em \mathbb{R}^2

$$(7-52) \quad \hat{g} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{x} \otimes \mathbf{x}^T}{z^2} = \frac{1}{1+x^2+y^2} \begin{pmatrix} 1+y^2 & -xy \\ -xy & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$(7-53) \quad \tan(\tilde{\theta}) = \frac{(1+y^2) \cos(\theta) - xy \sin(\theta)}{(1+x^2) \sin(\theta) - xy \cos(\theta)}$$

—(III)—

Para determinar a álgebra de Lie deste grupo $SO(2, 1)$ basta considerar famílias $\Lambda(t) = e^{t\xi}$ de grupos-a-um-parâmetro passando pela identidade $\mathbf{1} \in SO(2, 1)$. Os elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2, 1)$ são os geradores ξ , i.e. os vectores tangentes à identidade de $SO(2, 1)$ e que verificam

$$(7-54) \quad \left. \frac{d\Lambda(t)}{dt} \right|_{t=0} = \xi = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{A}}(0) & \dot{\mathbf{c}}(0) \\ \dot{\mathbf{d}}^T(0) & \dot{b}(0) \end{pmatrix} ; \quad \Lambda(0) = \mathbf{1}$$

Como Λ tem que verificar (7-42), a sua derivada deve verificar

$$(7-55) \quad \dot{\Lambda}^T g \Lambda + \Lambda^T g \dot{\Lambda} = \mathbf{0}$$

Como para $t = 0$ se tem

$$(7-56) \quad \mathbf{A}(0) = \mathbf{1} \quad ; \quad \mathbf{c}(0) = \mathbf{0} \quad ; \quad \mathbf{d}(0) = \mathbf{0} \quad ; \quad b(0) = 1$$

a condição (7-55) significa, a partir de (7-43)

$$(7-57) \quad \begin{aligned} (\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{A}} - \dot{\mathbf{d}} \otimes \mathbf{d}^T - \mathbf{d} \otimes \dot{\mathbf{d}}^T) \Big|_{t=0} &= 0 & \implies & \dot{\mathbf{A}}^T(0) = -\dot{\mathbf{A}}(0) \\ (\dot{\mathbf{c}}^T \mathbf{c} + \mathbf{c}^T \dot{\mathbf{c}} - 2b \dot{b}) \Big|_{t=0} &= 0 & \implies & \dot{b}(0) = 0 \\ (\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{c} + \mathbf{A}^T \dot{\mathbf{c}} - \dot{b} \mathbf{d} - b \dot{\mathbf{d}}) \Big|_{t=0} &= 0 & \implies & \dot{\mathbf{c}}(0) = \dot{\mathbf{d}}(0) \end{aligned}$$

Conclui-se assim que um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2, 1)$ é da forma geral

$$(7-58) \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 & \xi_1 & \xi_2 \\ -\xi_1 & 0 & \xi_3 \\ \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix} = \xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_2 \mathbf{v}_2 + \xi_3 \mathbf{v}_3$$

e nesta base

$$(7-59) \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

as constantes de estrutura são

$$(7-60) \quad c_{12}^3 = -1 \quad ; \quad c_{13}^2 = 1 \quad ; \quad c_{23}^1 = -1$$

todas as outras zero.

Para determinar formas invariantes podemos formar os produtos $\Lambda^{-1}d\Lambda$ e $(d\Lambda)\Lambda^{-1}$, cujas entradas são necessariamente formas invariantes à esquerda ou à direita, respectivamente. Para isso é necessário inverter Λ . É fácil de ver que

$$(7-61) \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T & -v_1 \\ \mathbf{u}_2^T & -v_2 \\ \tilde{\mathbf{x}}^T & -z \end{pmatrix}$$

e daí

$$(7-62) \quad \begin{aligned} \Lambda^{-1}d\Lambda &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T d\mathbf{u}_1 - v_1 dv_1 & \mathbf{u}_1^T d\mathbf{u}_2 - v_1 dv_2 & \mathbf{u}_1^T d\tilde{\mathbf{x}} - v_1 dz \\ \mathbf{u}_2^T d\mathbf{u}_1 - v_2 dv_1 & \mathbf{u}_2^T d\mathbf{u}_2 - v_2 dv_2 & \mathbf{u}_2^T d\tilde{\mathbf{x}} - v_2 dz \\ \tilde{\mathbf{x}}^T d\mathbf{u}_1 - z dv_1 & \tilde{\mathbf{x}}^T d\mathbf{u}_2 - z dv_2 & \tilde{\mathbf{x}}^T d\tilde{\mathbf{x}} - z dz \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}d(\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 - v_1^2) & -(\mathbf{u}_2^T d\mathbf{u}_1 - v_2 dv_1) & (\mathbf{u}_1^T - \frac{v_1}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_2^T d\mathbf{u}_1 - v_2 dv_1 & \frac{1}{2}d(\mathbf{u}_2^T \mathbf{u}_2 - v_2^2) & (\mathbf{u}_2^T - \frac{v_2}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} \\ -(\mathbf{u}_1^T - \frac{v_1}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} & -(\mathbf{u}_2^T - \frac{v_2}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} & \frac{1}{2}d(\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}} - z^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -(\mathbf{u}_2^T d\mathbf{u}_1 - v_2 dv_1) & (\mathbf{u}_1^T - \frac{v_1}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} \\ (\mathbf{u}_2^T d\mathbf{u}_1 - v_2 dv_1) & \mathbf{0} & (\mathbf{u}_2^T - \frac{v_2}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} \\ -(\mathbf{u}_1^T - \frac{v_1}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} & -(\mathbf{u}_2^T - \frac{v_2}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde utilizámos as identidades

$$(7-63) \quad \begin{cases} dz = \frac{\tilde{\mathbf{x}}^T d\tilde{\mathbf{x}}}{z} \\ d(\mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_2 - v_1 v_2) = 0 \\ d(\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_i - v_i^2) = 0 \\ dv_i = \frac{1}{z} (\mathbf{u}_i^T d\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}^T d\mathbf{u}_i) - \frac{v_i}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T d\tilde{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Obtivemos assim as três formas invariantes

$$(7-64) \quad \omega_1 = (\mathbf{u}_1^T - \frac{v_1}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} \quad ; \quad \omega_2 = (\mathbf{u}_2^T - \frac{v_2}{z} \tilde{\mathbf{x}}^T) d\tilde{\mathbf{x}} \quad ; \quad \omega_3 = (\mathbf{u}_2^T d\mathbf{u}_1 - v_2 dv_1)$$

—(IV)—

Uma parametrização de $H = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = -1\} = H_+ \cup H_-$ pode ser feita através dos mapas $\eta_{\pm} : [0, 2\pi[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$ com a seguinte forma:

$$(7-65) \quad \eta_{\pm}(\theta, \phi) = p(x, y, z) \quad \text{onde} \quad \begin{cases} x = \sinh(\phi) \cos(\theta) \\ y = \sinh(\phi) \sin(\theta) \\ z = \pm \cosh(\phi) \end{cases}$$

Infelizmente, este mapa não é bi-unívoco no ponto $p = \{0, 0, 1\}$, por isso não dá um sistema de cartas conveniente. No entanto, no conjunto $H - \{0, 0, \pm 1\}$ este sistema produz cartas locais que induzem uma métrica no sub-domínio apropriado de \mathbb{R}^2

$$(7-66) \quad \tilde{g} = \eta_* g = g \circ \eta^* = d\phi^2 + \sinh(\phi)^2 d\theta^2$$

Um sistema mínimo de cartas que cobre H consiste nas duas cartas obtidas por projecção estereográfica, a partir da origem, nos planos horizontais que passam pelos focos $z_{\pm} = \pm\sqrt{2}$. Cada carta $C_{\pm} = \{H_{\pm}, \zeta_{\pm}\}$ estabelece uma correspondência bi-unívoca $(x, y, z) \in H_{\pm} \Leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in D_{2_{\pm}} \subset \mathbb{R}^2$ que obedece aos constrangimentos

$$(7-67) \quad \begin{cases} \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{y}{x} \\ \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}{2} = \frac{x^2 + y^2}{z^2} \end{cases}$$

o que resulta nos seguintes mapas

$$(7-68) \quad \zeta_{\pm}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \tilde{x} = \sqrt{2} \frac{x}{z} \\ \tilde{y} = \sqrt{2} \frac{y}{z} \end{cases} \quad \zeta_{\pm}^{-1}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \begin{cases} x = \frac{\tilde{x}}{\sqrt{2 - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}} \\ y = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2 - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}} \\ z = \frac{\pm\sqrt{2}}{\sqrt{2 - (\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)}} \end{cases}$$

A métrica induzida em H por g é, nestas cartas,

$$(7-69) \quad \tilde{g} = \zeta_* g = g \circ \zeta^* = \frac{1}{(2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)^2} \left((2 - \tilde{y}^2) d\tilde{x}^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} d\tilde{x} d\tilde{y} + (2 - \tilde{x}^2) d\tilde{y}^2 \right)$$

o que significa uma matriz

$$(7-70) \quad \tilde{g} = \frac{1}{(2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2)^2} \begin{pmatrix} 2 - \tilde{y}^2 & \tilde{x}\tilde{y} \\ \tilde{x}\tilde{y} & 2 - \tilde{x}^2 \end{pmatrix}$$

Para encontrar um referencial ortonormado do espaço tangente $T_p H$, neste sistema de coordenadas é necessário encontrar vectores $\tilde{\mathcal{X}}_i = \tilde{X}_i \partial_{\tilde{x}} + \tilde{Y}_i \partial_{\tilde{y}}$ tais que

$$(7-71) \quad \begin{cases} \hat{g}(\tilde{\mathcal{X}}_i, \tilde{\mathcal{X}}_i) = 1 & \Leftrightarrow (2 - \tilde{y}^2) \tilde{X}_i^2 + 2\tilde{x}\tilde{y} \tilde{X}_i \tilde{Y}_i + (2 - \tilde{x}^2) \tilde{Y}_i^2 = 1 \\ \hat{g}(\tilde{\mathcal{X}}_1, \tilde{\mathcal{X}}_2) = 0 & \Leftrightarrow (2 - \tilde{y}^2) \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + 2\tilde{x}\tilde{y} \tilde{X}_1 \tilde{Y}_2 + (2 - \tilde{x}^2) \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2 = 0 \end{cases}$$

Soluções possíveis de (7-71) podem ser os vectores próprios de \tilde{g} , convenientemente normalizados,

$$(7-72) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbb{X}}_1 = \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}} \left(-\tilde{y} \partial_{\tilde{x}+\tilde{x}} \partial_{\tilde{y}} \right) \\ \tilde{\mathbb{X}}_2 = \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}} \left(\tilde{x} \partial_{\tilde{x}} + \tilde{y} \partial_{\tilde{y}} \right) \end{cases}$$

Como se vê imediatamente, este referencial é singular na origem, já que as curvas integrais destes campos são círculos centrados e rectas passando pela origem. Não é portanto uma boa base de referenciais para TH .

Contudo, em qualquer ponto $p \in H \subset \mathbb{R}^3$ deverá existir uma base (pseudo)-ortonormada do espaço tangente $T_p H$, formada por vectores \mathbb{X}_i que obdecem igualmente a $g(\mathbb{X}_i, \mathbb{X}_j) = \delta_{ij}$.

Uma solução possível para (7-71) é a imagem pelas cartas ζ dos campos pseudo-ortonormados

$$(7-73) \quad \begin{cases} \mathbb{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \left(\sqrt{1+x^2+y^2} \partial_x + x \partial_z \right) \\ \mathbb{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \left(xy \partial_x + (1+y^2) \partial_y + y\sqrt{1+x^2+y^2} \partial_z \right) \end{cases}$$

que dá

$$(7-74) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbb{X}}_1 = \sqrt{\frac{2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2}{2-\tilde{x}^2}} \left(\frac{(2-\tilde{x}^2)}{\sqrt{2}} \partial_{\tilde{x}} - \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{\sqrt{2}} \partial_{\tilde{y}} \right) \\ \tilde{\mathbb{X}}_2 = \sqrt{\frac{2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2}{2-\tilde{x}^2}} \left(\sqrt{2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2} \partial_{\tilde{y}} \right) \end{cases}$$

A matriz A que diagonaliza a métrica \tilde{g} é portanto

$$(7-75) \quad A = \sqrt{\frac{2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2}{2-\tilde{x}^2}} \begin{pmatrix} \frac{2-\tilde{x}^2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{\sqrt{2}} & \sqrt{2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2} \end{pmatrix}$$

Calculando a inversa desta matrix obtêm-se as formas duais de $\tilde{\mathbb{X}}_1, \tilde{\mathbb{X}}_2$

$$(7-76) \quad \begin{aligned} \tilde{e}^1 &= \frac{1}{(2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2)\sqrt{2-\tilde{x}^2}} \left(\sqrt{2(2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2)} d\tilde{x} \right) \\ \tilde{e}^2 &= \frac{1}{(2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2)\sqrt{2-\tilde{x}^2}} \left(\tilde{x}\tilde{y} d\tilde{x} + (2-\tilde{x}^2) d\tilde{y} \right) \end{aligned}$$

Calculando as derivadas exteriores destas formas

$$(7-77) \quad \begin{aligned} d\tilde{e}^1 &= -\frac{\sqrt{2}\tilde{y}}{\sqrt{2-\tilde{x}^2}(2-\tilde{x}^2-\tilde{y}^2)^{\frac{3}{2}}} d\tilde{x} \wedge d\tilde{y} \\ d\tilde{e}^2 &= 0 \end{aligned}$$

vemos que a solução das equações exteriores que dão os coeficientes de conexão $\tilde{e}_\nu^\mu = -\tilde{e}_\mu^\nu$

$$(7-78) \quad \begin{aligned} d\tilde{e}^1 &= \tilde{e}^2 \wedge \tilde{e}_2^1 \\ d\tilde{e}^2 &= \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}_1^2 \end{aligned}$$

é

$$(7-79) \quad \tilde{e}_2^1 = \frac{\tilde{y}}{\sqrt{2-x^2}} \tilde{e}^1$$

A correspondente forma de curvatura

$$(7-80) \quad \begin{aligned} \Theta_1^2 &= d\tilde{e}_1^2 - \tilde{e}_1^\tau \wedge \tilde{e}_\tau^2 = \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2 \\ \Theta_2^1 &= -\Theta_1^2 \end{aligned}$$

pode-se escrever

$$(7-81) \quad \Theta_\nu^\mu = \frac{1}{2} (\delta_{\nu\tau} \delta_\sigma^\mu - \delta_{\nu\sigma} \delta_\tau^\mu) \tilde{e}^\tau \wedge \tilde{e}^\sigma$$

Como $\Theta_\nu^\mu = \frac{1}{2} R_{\nu\tau\sigma}^\mu \tilde{e}^\tau \wedge \tilde{e}^\sigma$ temos

$$(7-82) \quad R_{112}^2 = -R_{212}^1 = 1$$

A curvatura escalar é, por contracção

$$(7-83) \quad \begin{aligned} R_{\nu\sigma} &= R_{\nu\tau\sigma}^\tau = (\delta_{\nu\tau} \delta_\sigma^\tau - \delta_{\nu\sigma} \delta_\tau^\tau) = -\delta_{\nu\sigma} \\ R_{11} &= R_{121}^2 = -1; \quad R_{22} = R_{212}^1 = -1 \\ R &= \delta^{\nu\sigma} R_{\nu\sigma} = R_1^1 + R_2^2 = -2 \end{aligned}$$

Para uma variedade Riemaniana bi-dimensional, a curvatura Gaussiana K é definida por

$$(7-84) \quad K = -\frac{R_{1212}}{\det(g)}$$

o que aqui indica $K = -1$, dado que nesta base $\det(g) = 1$. A mesma conclusão se tira comparando (7-80) com outra definição equivalente de K

$$(7-85) \quad d\tilde{e}_1^2 = -K \tilde{e}^1 \wedge \tilde{e}^2$$

—(v)—

Como a derivada de Lie \mathcal{L}_X é uma derivação da álgebra tensorial, podemos calcular $\mathcal{L}_X g$ usando, para vectores da base ∂_i, ∂_j , a regra

$$(7-86) \quad \mathcal{L}_X (g(\partial_i, \partial_j)) = (\mathcal{L}_X g)(\partial_i, \partial_j) + g(\mathcal{L}_X \partial_i, \partial_j) + g(\partial_i, \mathcal{L}_X \partial_j)$$

o que se traduz em

$$(7-87) \quad (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)(\partial_i, \partial_j) = \mathbb{X}(g(\partial_i, \partial_j)) + g(\partial_i \mathbb{X}, \partial_j) + g(\partial_i, \partial_j \mathbb{X})$$

ou mesmo

$$(7-88) \quad (\mathcal{L}_{\mathbf{X}}g)_{ij} = X^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i X^k + g_{ik} \partial_j X^k$$

Usando a parametrização dada em (7-65) obtemos uma métrica diagonal onde

$$(7-89) \quad g_{\phi\phi} = 1 \quad ; \quad g_{\theta\theta} = \sinh(\phi)^2 \quad ; \quad g_{\phi\theta} = g_{\theta\phi} = 0$$

As equações para o campo de Killing $\mathbb{X} = X^\phi \partial_\phi + X^\theta \partial_\theta$ são assim

$$(7-90) \quad \begin{cases} \mathbb{X}(g_{\phi\phi}) + 2g(\partial_\phi \mathbb{X}, \partial_\phi) & = 0 \\ \mathbb{X}(g_{\theta\theta}) + 2g(\partial_\theta \mathbb{X}, \partial_\theta) & = 0 \\ \mathbb{X}(g_{\phi\theta}) + g(\partial_\phi \mathbb{X}, \partial_\theta) + g(\partial_\theta \mathbb{X}, \partial_\phi) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_\phi X^\phi = 0 \\ X^\phi = -\tanh(\phi) \partial_\theta X^\theta \\ \partial_\theta X^\phi = -\sinh(\phi)^2 \partial_\phi X^\theta \end{cases}$$

cuja solução é

$$(7-91) \quad \begin{cases} X^\phi = -a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \\ X^\theta = c - (a \cos(\theta) + b \sin(\theta)) \coth(\phi) \end{cases}$$

onde a , b e c são constantes. Encontrámos assim três campos de Killing linearmente independentes

$$(7-92) \quad \begin{cases} \mathbb{X}_1 = \partial_\theta \\ \mathbb{X}_2 = \sin(\theta) \partial_\phi + \cos(\theta) \coth(\phi) \partial_\theta \\ \mathbb{X}_3 = \cos(\theta) \partial_\phi - \sin(\theta) \coth(\phi) \partial_\theta \end{cases}$$

Usando a derivada da transformação de coordenadas $\{\tilde{x}, \tilde{y}\} \rightarrow \{\phi, \theta\}$ para obter as imagens destes vectores nas cartas C conclui-se que

$$(7-93) \quad \tilde{\mathbb{X}} = (X^\phi \partial_\phi \tilde{x} + X^\theta \partial_\theta \tilde{x}) \partial_{\tilde{x}} + (X^\phi \partial_\phi \tilde{y} + X^\theta \partial_\theta \tilde{y}) \partial_{\tilde{y}}$$

ou seja

$$(7-94) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbb{X}}_1 = -\tilde{y} \partial_{\tilde{x}} + \tilde{x} \partial_{\tilde{y}} \\ \tilde{\mathbb{X}}_2 = -\tilde{x}\tilde{y} \partial_{\tilde{x}} + (2 - \tilde{y}^2) \partial_{\tilde{y}} \\ \tilde{\mathbb{X}}_3 = (2 - \tilde{x}^2) \partial_{\tilde{x}} - \tilde{x}\tilde{y} \partial_{\tilde{y}} \end{cases}$$

IV – ESTATÍSTICA QUÂNTICA: FUNÇÃO DE PARTIÇÃO ROTACIONAL \mathcal{Z}_{rot}

A molécula de Metano CH_4 tem a forma de um tetraedro regular cujos níveis de energia rotacionais são $E_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$, onde I é o valor comum dos três momentos de inércia principais e J o número quântico de rotação. Sabendo que o spin do próton é $s = \frac{1}{2}$ e que o do núcleo ^{12}C é nulo:

- (i)– Determine todas as 24 simetrias geométricas da molécula de metano, e a regra de produto do respectivo grupo T_d .
- (ii)– Determine as 5 classes de conjugação de T_d e a tabela de caracteres deste grupo.
- (iii)– Mostre que as simetrias rotacionais T_o (excluindo reflexões) formam um sub-grupo de T_d e caracterize os três tipos de representações irredutíveis que possui (que são responsáveis pela existência de três espécies de metano, meta-, orto- e para- CH_4).
- (iv)– Determine como é que as funções de onda de spin molecular se comportam relativamente ao grupo de rotações. O número total de configurações independentes de spin é $(2S_H + 1)^4(2S_C + 1) = 2^4$. Construa as funções próprias que diagonalizam S_{mol}^2 e $S_{z,mol}$ e mostre que se obtêm 5 estados de spin 2, não degenerados, 3 de spin 1, triplamente degenerados, e 1 de spin 0, duplamente degenerado. Mostre que estes conjuntos suportam representações irredutíveis (equivalentes para o mesmo spin) do sub-grupo T_o de T_d .

SUGESTÃO: Use a álgebra dos operadores S_+ , S_- e S_z , bem como os operadores de projecção

$$P_j = \prod_{J \neq j} (S^2 - J(J+1)\mathbf{1})$$

- (v)– Mostre que as representações irredutíveis $D^{(J)}$ de $O(3)$, restritas aos elementos de T_o , são completamente redutíveis em termos das representações irredutíveis de T_o e determine as respectivas multiplicidades para os casos $J = 0, 1, 2, 3$ e 4. (Para as representações irredutíveis $D^{(J)}$, os caracteres do grupo de rotações contínuo de \mathbb{R}^3 são

$$\begin{aligned} \chi^{(J)}(I) &= 2J + 1 \\ \chi^{(J)}(R_\phi) &= \frac{\sin\left(\left(J + \frac{1}{2}\right)\phi\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)} \end{aligned}$$

onde ϕ é o ângulo de rotação apropriado). Deduza daqui os pesos estatísticos g_J com que devem entrar os diversos níveis de energia **ROTACIONAIS** da molécula na função de partição rotacional (a baixas temperaturas)

$$\mathcal{Z}_{\text{rot}} = \frac{1}{16} \sum_J g_J (2J + 1) e^{-\frac{\hbar}{IkT} J(J+1)}$$

O número de representações irredutíveis inequivalentes que aparecem na representação regular do grupo T_d é igual ao número de classes de conjugação, que neste caso é $n = 5$. Pelo teorema de Burnside (4.4), designando por d_p a dimensão da representação irredutível indexada por p , deve-se ter

$$\sum_{p=1}^5 d_p^2 = \#T_d = 24$$

Para resolver esta equação, começamos por notar que não podem existir mais de 3 representações 1-dimensionais, porque

$$1 + 1 + 1 + 1 + d_5^2 = 24$$

não tem solução. Por outro lado, se existir uma representação 2-dimensional, as outras (para além da trivial $d_1 = 1$ que sempre existe) devem verificar

$$d_{p_1}^2 + d_{p_2}^2 + d_{p_3}^2 = 24 - 2^2 - 1 = 19 \quad \text{com} \quad d_{p_1} \leq d_{p_2} \leq d_{p_3}$$

Se $d_{p_1} = 1$ então $d_{p_2} = d_{p_3} = 3$ é uma solução. Se $d_{p_1} > 1$ não há mais soluções. Assim temos

$$1 + 1 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$$

Assim, o grupo de simetrias do tetraedro possui duas representações de dimensão 1, uma representação de dimensão 2 e duas representações de dimensão 3. Estas representações são geralmente designadas pela letras A_1, A_2 (1-dimensional, meta- CH_4), E (2-dimensional, para- CH_4), F_1, F_2 (3-dimensional, ortho- CH_4).

Dado que todas as classes de conjugação de T_d são ambivalentes (i.e. contêm os seus próprios inversos $C_i^{-1} = C_i$) todos os caracteres são reais porque

$$\chi^{(p)}(C_i^{-1}) = \overline{\chi^{(p)}(C_i)} = \chi^{(p)}(C_i)$$

Fazendo uso das relações gerais de ortogonalidade (p, q índices de representações irredutíveis, i, j índices de classes de conjugação)

$$(7-95) \quad \sum_{i=1}^5 c_i \overline{\chi^{(q)}(C_i)} \chi^{(p)}(C_i) = \#T_d \delta^{q,p}$$

$$(7-96) \quad \sum_{p=1}^5 c_i \overline{\chi^{(p)}(C_i)} \chi^{(p)}(C_j) = \#T_d \delta_{i,j}$$

e sabendo já que para as representações 1-dimensionais A_1, A_2 , ($p = 1, 2$) se tem $\chi^{(p)}(C_i) = \pm 1$ dado que T_d é ambivalente, obtemos de (7-95) para $p = 1$ (representação trivial, $\chi^{(1)}(C_i) = 1$) e $q = 2$:

$$1 + 3\chi^{(2)}(C_2) + 8\chi^{(2)}(C_3) + 6\chi^{(2)}(C_4) + 6\chi^{(2)}(C_5) = 0$$

cuja única solução é

$$\chi^{(2)}(C_2) = \chi^{(2)}(C_3) = +1 \quad ; \quad \chi^{(2)}(C_4) = \chi^{(2)}(C_5) = -1$$

Para a representação 2-dimensional E , ($p = 3$) tem-se, usando a mesma fórmula (7-95) com $q = 1$ ou $q = 2$:

$$\begin{cases} 2 + 3\chi^{(3)}(C_2) + 8\chi^{(3)}(C_3) + 6\chi^{(3)}(C_4) + 6\chi^{(3)}(C_5) = 0 \\ 2 + 3\chi^{(3)}(C_2) + 8\chi^{(3)}(C_3) - 6\chi^{(3)}(C_4) - 6\chi^{(3)}(C_5) = 0 \end{cases}$$

Somando obtém-se

$$4 + 6\chi^{(3)}(C_2) + 16\chi^{(3)}(C_3) = 0 \quad \text{com solução} \quad \begin{cases} \chi^{(3)}(C_2) = +2 \\ \chi^{(3)}(C_3) = -1 \end{cases}$$

Usando agora $p = q = 3$ em (7-95) com este resultado obtém-se

$$4 + 3(2)^2 + 8(-1)^2 + 6\chi^{(3)}(C_4)^2 + 6\chi^{(3)}(C_5)^2 = 24$$

ou seja

$$\chi^{(3)}(C_4)^2 + \chi^{(3)}(C_5)^2 = 0 \quad \text{só possível se} \quad \begin{cases} \chi^{(3)}(C_4) = 0 \\ \chi^{(3)}(C_5) = 0 \end{cases}$$

Finalmente, os caracteres das representações 3-dimensionais F_1 e F_2 ($p = 4, 5$) determinam-se mais facilmente usando agora a relação de ortogonalidade (7-96) no caso $i = j = 3$ dá

$$8(1 + 1 + (-1)^2 + \chi^{(4)}(C_3)^2 + \chi^{(5)}(C_3)^2) = 24$$

reduzindo-se a

$$\chi^{(4)}(C_3)^2 + \chi^{(5)}(C_3)^2 = 0 \quad \text{também só possível se} \quad \begin{cases} \chi^{(4)}(C_3) = 0 \\ \chi^{(5)}(C_3) = 0 \end{cases}$$

Assim sendo, voltando à relação (7-95) no caso $p = 4, q = 3$ tem-se (note que $\chi^{(3)}(C_1) = 2$ e $\chi^{(4)}(C_1) = 3$)

$$6 + 6\chi^{(4)}(C_2) + 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{com solução} \quad \chi^{(4)}(C_2) = -1$$

e de forma idêntica para $p = 5, q = 3$

$$6 + 6\chi^{(5)}(C_2) + 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{com solução} \quad \chi^{(5)}(C_2) = -1$$

Uma vez que conhecemos o carácter da classe C_2 para todas as representações $p = 1, \dots, 5$, podemos deduzir os caracteres que faltam para as classes C_4 e C_5 usando (7-96) com $i = 2, j = 4$

$$\begin{cases} 3(1 - 1 + 0 - \chi^{(4)}(C_4) - \chi^{(4)}(C_5)) = 0 \\ 3(1 - 1 + 0 - \chi^{(5)}(C_4) - \chi^{(5)}(C_5)) = 0 \end{cases} \quad \text{o que determina} \quad \begin{cases} \chi^{(4)}(C_5) = -\chi^{(4)}(C_4) \\ \chi^{(5)}(C_5) = -\chi^{(5)}(C_4) \end{cases}$$

A normalização dos caracteres das representações $p = 4, 5$ indicam que

$$(7-97) \quad 9 + 3 + 0 + 6\chi^{(4)}(C_4)^2 + 6(-\chi^{(4)}(C_4))^2 = 24 \quad \text{podendo ser uma solução} \quad \begin{cases} \chi^{(4)}(C_4) = +1 \\ \chi^{(4)}(C_5) = -1 \end{cases}$$

e a ortogonalidade (7-95) entre os caracteres das representações $p = 4$ e 5 determina que

$$9 + 3 + 0 + 6\chi^{(5)}(C_4) - 6(-\chi^{(5)}(C_4)) = 0 \quad \text{obtendo-se finalmente} \quad \begin{cases} \chi^{(5)}(C_4) = -1 \\ \chi^{(5)}(C_5) = +1 \end{cases}$$

Note que a outra solução possível para (7-97) apenas troca os sinais nos caracteres das duas últimas classes nas representações irreduzíveis $p = 4, 5$, não produzindo caracteres diferentes no total.

Reproduzimos aqui a tabela de caracteres deduzida anteriormente:

T_d	$C_1 = I$	$C_2 = 3\sigma^{(2)}$	$C_3 = 8\rho^{(3)}$	$C_4 = 6\eta^{(4)}$	$C_5 = 6\pi^{(2)}$
A_1	+1	+1	+1	+1	+1
A_2	+1	+1	+1	-1	-1
E	+2	+2	-1	0	0
F_1	+3	-1	0	+1	-1
F_2	+3	-1	0	-1	+1

Tabela de Caracteres do grupo T_d

Estas simetrias são importantes na caracterização dos estados normais de vibração da molécula. Vemos assim que se as funções de onda da molécula de Metano devem pertencer a representações irreduzíveis específicas de T_d , então podemos classificá-las em 2 espécies de estados não-degenerados (com simetrias A_1 e A_2), 1 espécie de estados duplamente degenerados (E) e 2 espécies de estados triplamente degenerados (F_1 e F_2). As espécies degeneradas correspondem a funções de onda que não têm necessariamente nenhuma simetria particular relativamente às operações do grupo de simetria T_d .

Para os graus de liberdade rotacionais, contudo, é desnecessário considerar as simetrias de reflexão $\eta^{(4)}$ e $\pi^{(2)}$ na classificação das funções de onda rotacionais, e podemos apenas considerar o subgrupo $T_0 \subset T_d$ constituído pelas classes $C_1 = I$, $C_2 = 3\sigma^{(2)}$ e $C_3 = 8\rho^{(3)}$. Como se pode ver da tabela de caracteres anterior para T_d , a diferença entre os caracteres das representações A_1 e A_2 , bem como entre F_1 e F_2 , apenas é visível para os valores nas classes C_4 e C_5 , pelo que para o subgrupo T_0 estes caracteres são idênticos dois-a-dois. Podemos assim escrever uma tabela para T_0

T_0	$C_1 = I$	$C_2 = 3\sigma^{(2)}$	$C_3 = 8\rho^{(3)}$
A	+1	+1	+1
E	+2	+2	-1
F	+3	-1	0

Tabela de Caracteres do sub-grupo rotacional $T \subset T_d$

Acontece que os níveis de energia da espécie A corresponde aos do meta- CH_4 , os da espécie E aos do para- CH_4 e os da espécie F aos do orto- CH_4 . Estas denominações aparecem ligadas à análise espectral da molécula. Na realidade, não é a espécie particular de função de onda rotacional que determina as características do espectro, mas antes a espécie da função de onda total, produto das contribuições de função de ondas descrevendo estados electrónicos, vibracionais, rotacionais e de spin nuclear.

$$\Psi_{tot} = \psi_{el.} \psi_{vib.} \psi_{rot.} \psi_{spin}$$

A designação de espécie A (ou E ou F) para CH_4 depende de todas as funções de onda que contribuem para Ψ_{tot} , excepto a de spin nuclear ψ_{spin} , serem do tipo A (ou E ou F) relativamente à acção do subgrupo rotacional T_0 . Para os espectros de vibração-rotação, a componente electrónica $\psi_{el.}$ é praticamente sempre completamente simétrica, pelo que a espécie do espectro fica determinada pelo produto $\psi_{vib.} \psi_{rot.}$.

A decomposição de um produto de representações nas suas componentes irredutíveis (com multiplicidades) é facilmente determinada uma vez construída, a partir da tabela de caracteres acima definida, a tabela de produtos para as representações. Por exemplo, para decompor o produto de representações $A \times E$ relembramos que

$$\chi^{A \times E}(C_i) = \chi^{(A)}(C_i) \chi^{(E)}(C_i)$$

Assim o carácter do produto de representações é simplesmente o produto dos caracteres de cada representação irredutível individual. No caso $A \times E$, é evidente que, sendo A a representação trivial de T_0 , se tem $A \times E \sim E$

$$\chi^{A \times E} = \chi^{(E)}$$

De forma análoga, o produto $E \otimes F$ tem caracteres

T_0	C_1	C_2	C_3
E	+2	+2	-1
F	+3	-1	0
$E \otimes F$	+6	-2	0

Para calcular a multiplicidade da decomposição em irredutíveis de $E \otimes F$ deve-se resolver

$$\chi^{E \otimes F} = \alpha \chi^{(A)} + \beta \chi^{(E)} + \gamma \chi^{(F)}$$

com α, β, γ constantes. O sistema linear resultante é

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 6 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = -2 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \quad \text{com solução} \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Consequentemente, $\chi^{E \otimes F} = 2 \chi^{(F)}$, ou seja o produto de representações $E \otimes F$ é completamente resolúvel em duas representações irredutíveis F .

Note-se que em geral existe uma forma automática de calcular os coeficientes de multiplicidade numa representação completamente redutível de um grupo G usando as propriedades de ortogonalidade dos caracteres das suas representações irredutíveis. De facto, o carácter duma representação redutível pode-se escrever como

$$\chi^{red} = \sum_{p=1}^n m_p \chi^{(p)}$$

e então as multiplicidades escrevem-se

$$m_p = \langle \chi^{red}, \chi^{(p)} \rangle = \frac{1}{\#G} \sum_{i=1}^n c_i \chi^{red}(C_i) \chi^{(p)}(C_i)$$

Vê-se imediatamente que, para o grupo T_0 com 12 elementos a representação $E \otimes F$ tem multiplicidades

$$\begin{cases} m_A = \alpha = \frac{1}{12} (6 \times 1 - 3 \times 2 + 0) = 0 \\ m_E = \beta = \frac{1}{12} (6 \times 2 - 3 \times 2 \times 2 + 0) = 0 \\ m_F = \gamma = \frac{1}{12} (6 \times 3 + 3 \times 2 + 0) = 2 \end{cases}$$

Podemos assim construir uma tabela de multiplicação para as representações de T_0 da seguinte forma

\otimes	A	E	F
A	A	E	F
E	E	$2A \oplus 2E$	$2F$
F	F	$2F$	$A \oplus 2E \oplus 2F$

A inclusão das funções de onda de spin nuclear ψ_{spin} vai afectar a estatística das diferentes espécies, uma vez que pode transformar a função $\psi_{el.} \psi_{vib.} \psi_{rot.}$ sem qualquer simetria particular numa função Ψ_{tot} com a necessária simetria relativamente à troca de partículas idênticas. Cada combinação terá então um peso estatístico igual ao número de estados próprios independentes que se podem construir para um determinado nível. Vamos então determinar como é que as funções de onda de spin nuclear ψ_{spin} se comportam relativamente ao grupo de rotações T_0 . Na molécula de Metano existem quatro núcleos H_1 de spin $S_H = \frac{1}{2}$ e um C_{12} de spin $S_C = 0$. Pode-se mostrar que o número total de configurações independentes de spin deve ser

$$(2S_H + 1)^4 (2S_C + 1) = 16$$

Iremos mostrar que as funções próprias que diagonalizam S^2 e S_z total dividem-se em $(2S + 1) = 5$ estados de spin $S = 2$, que são completamente simétricos relativamente a T_d , $(2S + 1) = 3$ estados de spin $S = 1$, que são triplamente degenerados, e $(2S + 1) = 1$ estado de spin $S = 0$ duplamente degenerado. Mais uma vez, os estados degenerados não exibem simetrias completas (embora possam ter simetrias parciais). Assim as funções de spin nucleares pertencem a uma das espécies em $5A + 3F + E$. Quando uma operação de simetria é efectuada sobre $\Psi_{tot} = \psi_{el.} \psi_{vib.} \psi_{rot.} \psi_{spin}$ fá-lo-há através do produto destes tipos de representações de T_d ou T_0 , para cada uma das funções $\psi_{vib.}$, $\psi_{rot.}$ ou ψ_{spin} .

7.2 Tópicos propostos

1 – QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

Elliot & Darber-Symmetry In Physics, pps.99,502

II – TABELA PERIÓDICA E TEORIA DE GRUPOS

Sternberg-Group Theory and Physics, pps 198

III – REGRAS DE SELECÇÃO EM MECÂNICA QUÂNTICA

Elliot & Darber-Symmetry In Physics, pps.91

Sternberg-Group Theory In Physics, pps 116

Hamermesh-Group Theory and Applications to Physical Problems, pps166

IV – SIMETRIAS DINÂMICAS DE SISTEMAS RELATIVISTAS E NÃO-RELATIVISTAS

Barut-Theory of Group Representations and Applications, pps 412

V – ALGEBRAS DE LIE E MECÂNICA QUÂNTICA

Barut-Theory of Group Representations and Applications, pps 378

VI – SIMETRIAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E LEIS DE CONSERVAÇÃO

Sattinger & Weaver-Lie Groups and Algebras with Applications..., pps. 76-88

Stephani-Differential Equations: Their Solution Using Symmetries

Olver-Applications of Lie Groups to Differential Equations

VII – AS REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS DO GRUPO DE POINCARÉ

Classificação de Wigner...

Elliot & Darber-Symmetry In Physics, pps.363

VIII – PARIDADE E FÍSICA: INVERSÕES DE ESPAÇO E TEMPO

... ou porque é que a paridade não é uma simetria da Natureza.

Sternberg-Group Theory and Physics, pps -151-161

IX – EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVISTAS

... e as Representações Induzidas dos grupos de Lorentz e Poincaré. De facto, é possível mostrar que todas as equações de ondas relativistas são uma expressão dos operadores de projecção calculados para representações induzidas particulares de $SL(2, \mathbb{C})$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Maxwell} & (m = 0, s = 1) \\ \text{Weyl} & (m = 0, s = 1/2) \\ \text{Klein-Gordon} & (s = 0) \\ \text{Dirac} & (m > 0, s = 1/2) \end{array} \right.$$

A equação de Klein-Gordon é aplicável a partículas de **SPIN** qualquer.

$$(p^2 - m^2)\psi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 \right) \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0$$

Sofre contudo as seguintes deficiências:

- **A DENSIDADE DE PROBABILIDADE**

$$\rho = j^0 = \frac{i \hbar}{2m} (\bar{\phi} \partial_t \phi - \phi \partial_t \bar{\phi})$$

não é **POSITIVA DEFINIDA**.

- Existem soluções que representam **ESTADOS DE ENERGIA NEGATIVA** bem como positiva $E = \pm (m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2)^{\frac{1}{2}}$. Isto significa que uma partícula pode, através de interações, decair para estados de energia infinita negativa, libertando no processo uma quantidade infinita de energia!

Elliot & Darber-Symmetry In Physics, pps.375

Barut-Theory of Group Representations and Applications, pps 596

X – FORMAS INVARIANTES EM GRUPOS DE LIE E EQUAÇÕES DE MAURER-CARTAN

Sattinger & Weaver-Lie Groups and Algebras with Applications..., pps. 89-108

PARTE VI

APÊNDICES

APÊNDICE A

SIMETRIAS E FIBRADOS VECTORIAIS

Contents

A.1 Nota sobre Simetrias e Fibrados Vectoriais	199
--	-----

A.1 Nota sobre Simetrias e Fibrados Vectoriais

A definição de simetrias de um sistema físico implica que no caso de N partículas, uma transformação do grupo agindo no espaço origine uma nova configuração do sistema que obedece às mesmas leis de movimento. Assim, e por exemplo para pequenos deslocamentos em torno de uma posição de equilíbrio, esperamos equações lineares num espaço de configuração $Q \simeq \mathbb{R}^{3N}$ onde

$$\frac{d^2 \mathbf{q}}{dt^2} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{q} = 0$$

sendo \mathbf{F} um operador linear representando as interações. Assim, se $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}$ com $\mathbf{T} \in G$, esperamos que

$$\frac{d^2 \tilde{\mathbf{q}}}{dt^2} + \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{q}} = 0$$

o que significa que $\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}^{-1}$, ou seja $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}$. Se o grupo de simetrias G está representado irreduzivelmente no espaço dos \mathbf{q} , então isso significaria que $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{Id}$ pelo lema de Schur. Se os \mathbf{T} não configuram uma representação irreduzível, então sabemos já que esta poder-se-há decompor em irreduzíveis, e em cada uma delas haverá um valor próprio único, constituindo um espectro da representação.

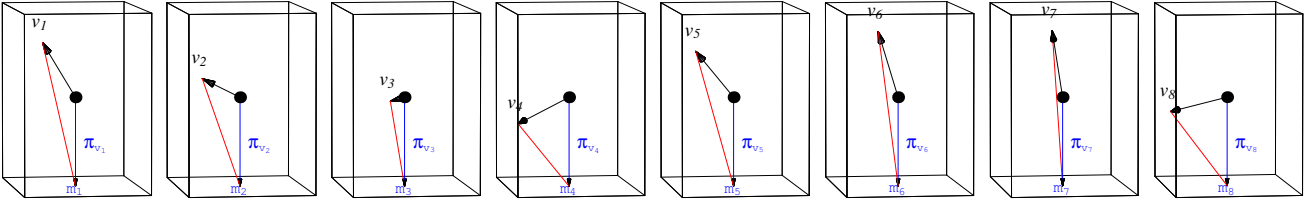
A construção dum fibrado homogêneo sobre um conjunto M (espaço base) representa o espaço natural para estudar a acção de um grupo de simetrias discreto num sistema de N pontos.

Vamos associar a cada ponto m um espaço vectorial (a fibra sobre o ponto) V_m . O **ESPAÇO FIBRADO** \mathcal{F} será a união destes espaços vectoriais $\mathcal{F} = \bigsqcup_{m \in M} V_m$ mas cada "ponto" de \mathcal{F} preserva memória de que V_m veio. Assim é possível construir uma **PROJECCÃO** $\pi : \mathcal{F} \rightarrow M$, que associa a cada $v(m) \in \mathcal{F}$ a imagem $\pi_{v(m)} = m \in M$. Óbviamente, $\pi^{-1}(m) \equiv V_m$ é a fibra sobre m .

Uma **SECÇÃO** do espaço fibrado \mathcal{F} consiste em atribuir um vector de V_m a cada m , de forma que

$$\sigma : M \rightarrow \mathcal{F}$$

$$m \mapsto \sigma(m) \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \sigma(m) \in V_m \\ \pi_{\sigma(m)} = m \end{cases} \quad \text{ou} \quad \pi \circ \sigma = id$$



Na figura junta representámos a secção $\sigma(m_i) = v_i$. O conjunto de todas as secções do fibrado \mathcal{F} é um espaço vectorial $\Gamma_M(\mathcal{F})$, onde a soma de duas secções é naturalmente $(a\sigma_1 + b\sigma_2)(m) = a\sigma_1(m) + b\sigma_2(m)$. A dimensão deste espaço vectorial é obviamente $\sum_{m \in M} \dim(V_m) = N \times \dim(V)$, assumindo doravante que todos os V_m são cópias do mesmo espaço V . Se escolhermos bases $\{e_i(m)\}_{i=1,2,\dots,\dim(V_m)}$ para cada fibra V_m , podemos construir uma base do espaço de secções $\Gamma_M(\mathcal{F})$ definindo secções $\sigma_{e_i(m)}$ cujo valor é nulo excepto para $m' = m$, i.e.

$$\sigma_{e_i(m)}(m') = \begin{cases} 0 & \text{se } m' \neq m \\ e_i(m) & \text{se } m' = m \end{cases}$$

Assim qualquer secção de \mathcal{F} se pode escrever como combinação linear de secções da base $\sigma = \sum_{m,i} \lambda_i(m) \sigma_{e_i(m)}$.

Suponhamos agora que existe um grupo G agindo sobre o espaço da base M . Se dermos uma representação $R : G \rightarrow \text{AUT}(V)$ com caracter χ^R , é em princípio possível definir uma acção de G sobre todo o fibrado \mathcal{F} , atribuindo a $v(m)$ um elemento de V_{gm} que dependa linearmente de $v(m)$, e que pode ser

$$g \cdot v(m) = R_g v(m) = \tilde{v}^g(gm)$$

Com esta definição tem-se $g \cdot \pi_{v(m)} = \pi_{g \cdot v(m)}$, i.e. $\pi : \mathcal{F} \rightarrow M$ é um G -morfismo, e \mathcal{F} designa-se um **FIBRADO VECTORIAL G -HOMOGÉNEO**.

Então, existe uma representação natural de G em $\Gamma_M(\mathcal{F})$, o espaço vectorial de secções de \mathcal{F} . Esta representação fica definida como o protótipo duma operação de simetria duma molécula com deslocamentos, isto é, embora se troquem as posições dos átomos (i.e. pontos de M) e seus respectivos deslocamentos do equilíbrio, a nova configuração (i.e. secção de \mathcal{F}) deve representar uma situação fisicamente equivalente à anterior. Assim queremos que $R_g^\Gamma : \Gamma_M(\mathcal{F}) \rightarrow \Gamma_M(\mathcal{F})$ seja um automorfismo definido como

$$(R_g^\Gamma \sigma)(m) = g \cdot \sigma(g^{-1}m) = R_g \sigma(g^{-1}m) \quad \text{i.e.} \quad R_g^\Gamma \sigma = g \cdot (\sigma \circ g^{-1})$$

Isto é uma generalização do conceito de representação regular. De facto, no caso em que a fibra-tipo é $V = \mathbb{C}$, a noção de secção reduz-se á de função com valores complexos $\sigma(m) = f(m)$ e se $R : G \rightarrow \text{AUT}(\mathbb{C})$ for a representação trivial $R_g = 1$ tem-se $(R_g^\Gamma f)(m) = f(g^{-1}m)$.

Note-se que a acção de G nas secções de base $\sigma_{e_i(m)}$ acima indicadas de $\Gamma_M(\mathcal{F})$ é particularmente fácil de

visualizar: de facto

$$(R_g^\Gamma \sigma_{e_i(m)})(m') = R_g \sigma_{e_i(m)}(g^{-1}m') = \begin{cases} 0 & \text{se } m' \neq gm \\ R_g e_i(m) & \text{se } m' = gm \end{cases}$$

Agora, se quisermos podemos escrever

$$\langle \tilde{\sigma}, R_g^\Gamma \sigma \rangle = \sum_{m, \tilde{m}, i, k} \tilde{\lambda}_k(\tilde{m}) \lambda_i(m) \langle \tilde{\sigma}_{e_k(\tilde{m})}, R_g^\Gamma \sigma_{e_i(m)} \rangle = \sum_{m, \tilde{m}, i, k} \tilde{\lambda}_k(\tilde{m}) \lambda_i(m) (R_g^\Gamma)_{m, \tilde{m}}^{i, k}$$

Para calcular o traço desta representação note que $(R_g^\Gamma)_{m, m}^{i, i} = \langle \tilde{\sigma}_{e_i(m)}, R_g^\Gamma \sigma_{e_i(m)} \rangle$ só é diferente de zero nos pontos fixos por g (i.e. em que $gm = m$) já que

$$\langle \tilde{\sigma}_{e_i(m)}, R_g^\Gamma \sigma_{e_i(m)} \rangle = \sum_{m' \in M} \tilde{\sigma}_{e_i(m)}(m') \cdot (R_g^\Gamma \sigma_{e_i(m)})(m') = e_i(m) \cdot R_g \sigma_{e_i(m)}(g^{-1}m) = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq gm \\ (R_g)_i^i & \text{se } m \equiv gm \end{cases}$$

Assim obtemos a fórmula de **WIGNER** envolvendo o número de pontos fixos por g :

$$\chi^\Gamma(g) = \text{TR} [R_g^\Gamma] = \sum_{m, i} (R_g^\Gamma)_{m, m}^{i, i} = \# \{m = gm\} \chi^R(g)$$

que é um caso particular da fórmula de **FROBENIUS**

$$\chi^\Gamma(g) = \sum_{\substack{m \in M \\ (m=gm)}} \chi^{R_{V_m}}(g)$$

quando as representações de G em cada fibra V_m são diferentes de ponto para ponto.

A representação que construímos pode não ser irredutível, caso em que $\langle \chi^\Gamma, \chi^\Gamma \rangle > 1$, mas será completamente redutível se G é finito ou compacto, e então $\langle \chi^\Gamma, \chi^{(i)} \rangle = m^{(i)}$ é a multiplicidade com que cada representação irredutível de G aparece na que construímos. Quando $m^{(i)} = 0$ isso é indicação de uma regra de selecção física que impede a contribuição dessa particular representação irredutível.

APÊNDICE B

ESTRUTURAS EM ESPAÇOS VECTORIAIS

Contents

B.1 Estrutura Euclídeana	203
B.2 Estrutura Complexa	204
B.3 Estrutura Simplética	207

B.1 Estrutura Euclídeana

DEFINIÇÃO [B.1]

Uma estrutura **EUCLÍDEANA** num espaço vectorial real V , de dimensão n , é uma forma bilinear $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (i.e. um produto escalar) tal que, para todos os $\vec{x}, \vec{y} \in V$,

$$g \text{ é } \begin{cases} \text{SIMÉTRICA} & : & g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x}) \in \mathbb{R} \\ \text{POSITIVA-DEFINIDA} & : & g(\vec{x}, \vec{x}) > 0; \\ \text{NÃO-DEGENERADA} & : & g(\vec{x}, \cdot) \equiv 0 \iff \vec{x} = 0; \end{cases}$$

Esta estrutura tem como **SIMETRIAS** o grupo ortogonal $O(n)$

- Escrevendo g sob forma matricial $g(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T G \vec{y}$, existe uma base de V para a qual $G = 1$. Uma transformação linear $A \in \text{AUT}(V)$ preserva esta estrutura SSE $A^T G A = G$ ou, numa base ortonormada, $A^T A = 1$.

B.2 Estrutura Complexa

DEFINIÇÃO [B.2]

Uma estrutura **COMPLEXA** num espaço vectorial real V é um automorfismo

$$\mathbf{J} \in \text{AUT}[V] : \mathbf{J}^2 = -1$$

Esta estrutura tem como **SIMETRIAS** o grupo $GL(n, \mathbb{C})$, com $n = \frac{1}{2}\text{DIM}(V)$

Um espaço vectorial real $V_{\mathbb{R}}$ com uma estrutura complexa \mathbf{J} tem que ter dimensão **PAR** já que

$$0 < (\text{DET}[\mathbf{J}])^2 = \text{DET}[\mathbf{J}^2] = (-1)^{\text{DIM}[V_{\mathbb{R}}]}$$

Um espaço vectorial complexo $V_{\mathbb{C}}$ pode sempre ser visto como um espaço vectorial real $V_{\mathbb{C}}^r$ de dimensão $2n = 2 \text{ DIM}_{\mathbb{C}}[V_{\mathbb{C}}]$. Qualquer base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $V_{\mathbb{C}}$ dá origem a uma base

$$\{f_1, \dots, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{2n}\} \in V_{\mathbb{C}}^r$$

fazendo as identificações

$$\begin{cases} f_1 = e_1, \dots, f_n = e_n \\ f_{n+1} = ie_1, \dots, f_{2n} = ie_n \end{cases}$$

Este espaço $V_{\mathbb{C}}^r$ vem naturalmente dotado de uma estrutura complexa $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ pela correspondência

$$\begin{aligned} \mathbf{JX} &= (\text{forma real de}) iX \\ &= (\text{forma real de}) i(X^k + iX^{n+k})e_k \\ &= (\text{forma real de}) (iX^k - X^{n+k})e_k \\ &= -X^{n+k}f_k + X^k f_{n+k} \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO [B.3]

Dada uma **ESTRUTURA COMPLEXA** \mathbf{J} num espaço vectorial real $V_{\mathbb{R}}$ podemos associar-lhe um espaço vectorial complexo $V_{\mathbb{C}}^J$ de dimensão complexa $n = \frac{1}{2}\text{dim}(V_{\mathbb{R}})$ definindo a multiplicação de vectores $\mathbf{X} \in V_{\mathbb{R}}$ por escalares complexos $z \in \mathbb{C}$, i.e.

$$V_{\mathbb{C}}^J = \{V_{\mathbb{R}} \ni \mathbf{X} : z \mathbf{X} := \text{Re}[z] \mathbf{X} + \text{Im}[z] \mathbf{JX}; \quad \forall z \in \mathbb{C}\}$$

Existe uma outra forma de associar um espaço vectorial complexo com um dado espaço vectorial real $V_{\mathbb{R}}$ de qualquer dimensão (sim, até ímpar !) e que é o processo de **COMPLEXIFICAÇÃO**.

DEFINIÇÃO [B.4]

A **COMPLEXIFICAÇÃO** $V_{\mathbb{R}}^c$ de um espaço vectorial real $V_{\mathbb{R}}$ é o espaço vectorial complexo de dimensão $\text{DIM}_{\mathbb{C}}[V_{\mathbb{R}}^c] = \text{DIM}[V_{\mathbb{R}}]$ definido por

$$V_{\mathbb{R}}^c := \{V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \ni \mathbf{Z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \quad z \mathbf{Z} = (\text{Re}[z] \mathbf{x} - \text{Im}[z] \mathbf{y}, \text{Im}[z] \mathbf{x} + \text{Re}[z] \mathbf{y}); \quad \forall z \in \mathbb{C}, \}$$

Recordando que, se $\mathbf{Z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V_{\mathbb{R}}^c$, temos

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \\ \overline{\mathbf{Z}} = (\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \\ i\mathbf{Z} = (-\mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{cases}$$

é possível representar qualquer elemento $\mathbf{Z} \in V_{\mathbb{R}}^c$ na forma

$$\begin{cases} \mathbf{Z} = \mathbf{X} + i \mathbf{Y} \\ \overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \\ \overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} \end{cases} ; \quad \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V_{\mathbb{R}}^c$$

Note que, se $V_{\mathbb{R}}$ possui uma estrutura complexa \mathbf{J} (e conseqüentemente $\text{DIM}[V_{\mathbb{R}}] = 2n$), então $V_{\mathbb{C}}^J \neq V_{\mathbb{R}}^c$ porque $\text{DIM}_{\mathbb{C}}[V_{\mathbb{C}}^J] = \frac{1}{2}\text{DIM}V_{\mathbb{R}} = n$ enquanto que $\text{DIM}_{\mathbb{C}}[V_{\mathbb{R}}^c] = \text{DIM}[V_{\mathbb{R}}] = 2n$! Contudo, estas duas noções não são totalmente disjuntas.

LEMA B.5

As seguintes afirmações são equivalentes:

- B.5 - i. existência de uma estrutura complexa \mathbf{J} em $V_{\mathbb{R}}$
- B.5 - ii. existência de sub-espços vectoriais **COMPLEXOS** $W_{\mathbb{C}}(\mathbf{J}), \overline{W}_{\mathbb{C}}(\mathbf{J}) \subset V_{\mathbb{R}}^c$ conjugados, de dimensão $\text{DIM}_{\mathbb{C}}[W_{\mathbb{C}}(\mathbf{J})] = \text{DIM}_{\mathbb{C}}[\overline{W}_{\mathbb{C}}(\mathbf{J})] = \frac{1}{2}\text{DIM}[V_{\mathbb{R}}] = n$, tais que

$$V_{\mathbb{R}}^c = W_{\mathbb{C}}(\mathbf{J}) \oplus \overline{W}_{\mathbb{C}}(\mathbf{J})$$

DEMONSTRAÇÃO: (i) \Rightarrow (ii)

Dada uma estrutura complexa \mathbf{J} em $V_{\mathbb{R}}$, associemos-lhe um endomorfismo natural $\mathbf{J}^c : V_{\mathbb{R}}^c \rightarrow V_{\mathbb{R}}^c$ definido trivialmente por $\mathbf{J}^c \mathbf{Z} = (\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{J}\mathbf{y})$. Define-se então $W_{\mathbb{C}}(\mathbf{J}) \subset V_{\mathbb{R}}^c$ como o sub-espço de $V_{\mathbb{R}}^c$

$$W_{\mathbb{C}}(\mathbf{J}) := \{\mathbf{Z} \in V_{\mathbb{R}}^c : \mathbf{J}^c \mathbf{Z} = i\mathbf{Z}\}$$

Isto equivale a afirmar

$$\mathbf{Z} \in W_c(\mathbf{J}) \iff (\mathbf{J}\mathbf{x}, \mathbf{J}\mathbf{y}) = (-\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

ou seja $\mathbf{y} = -\mathbf{J}\mathbf{x}$ e

$$\begin{cases} W_c(\mathbf{J}) := \{\mathbf{Z} \in V_{\mathbb{R}}^c : \mathbf{Z} = (\mathbf{x}, -\mathbf{J}\mathbf{x})\} \\ \overline{W}_c(\mathbf{J}) := \{\overline{\mathbf{Z}} \in V_{\mathbb{R}}^c : \overline{\mathbf{Z}} = (\mathbf{x}, \mathbf{J}\mathbf{x})\} \end{cases}$$

Como é evidente, $W_c(\mathbf{J}) \cap \overline{W}_c(\mathbf{J}) = \{0\}$ e se $\mathbf{Z} \in V_{\mathbb{R}}^c$, existe uma decomposição única

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \overline{\mathbf{Y}} \quad ; \quad \mathbf{X} \in W_c(\mathbf{J}); \quad \overline{\mathbf{Y}} \in \overline{W}_c(\mathbf{J})$$

a saber

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{Z} - i\mathbf{J}^c\mathbf{Z} = (\mathbf{u} + \mathbf{J}\mathbf{v}, -\mathbf{J}(\mathbf{u} + \mathbf{J}\mathbf{v})) \\ \overline{\mathbf{Y}} = \mathbf{Z} + i\mathbf{J}^c\mathbf{Z} = (\mathbf{u} - \mathbf{J}\mathbf{v}, \mathbf{J}(\mathbf{u} - \mathbf{J}\mathbf{v})) \end{cases}$$

— **DEMONSTRAÇÃO:** $(ii) \implies (i)$ —

Seja V_c um espaço vectorial complexo decomponível como uma soma directa de sub-espços conjugados $V_c = W_c \oplus \overline{W}_c$. O conjunto

$$V_{\mathbb{R}} = \{\mathbf{Z}_r \in V_c : \mathbf{Z}_r = \mathbf{X} + \overline{\mathbf{X}}; \quad \mathbf{X} \in W_c\}$$

é um espaço vectorial real $(\mathbf{Z}_r = \overline{\mathbf{Z}_r})$ com uma estrutura complexa $\mathbf{J} \in \text{Aut}(V_{\mathbb{R}})$ definida por

$$\mathbf{J}\mathbf{Z}_r = i(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}) = i\mathbf{X} + (i\overline{\mathbf{X}})$$

— **EXEMPLOS** —

$[V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}]$ Como $\text{DIM}V_{\mathbb{R}} = 1$, não existe estrutura complexa em \mathbb{R} . O complexificado de \mathbb{R} é

$$V_{\mathbb{R}}^c = \{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni \mathbf{Z} = (s, t) : z\mathbf{Z} = (xs - yt, ys + xt); \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\} \simeq \mathbb{C}$$

Como $\text{DIM}_c V_{\mathbb{R}}^c = 1$, não existe uma decomposição de $V_{\mathbb{R}}^c$ em soma directa de sub-espços complexos conjugados.

$[V_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2]$ Neste caso $\text{DIM}V_{\mathbb{R}} = 2$, pelo que qualquer $\mathbf{J} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}$ com $\mathbf{A} \in GL(V_{\mathbb{R}})$ é uma estrutura complexa possível. O espaço complexo associado

$$V_c^J = \{\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{Z} : z\mathbf{Z} = x\mathbf{Z} + y\mathbf{J}\mathbf{Z}; \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\}$$

que só é isomorfo a \mathbb{C} se $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

O **COMPLEXIFICADO** de \mathbb{R}^2 é o espaço

$$V_{\mathbb{R}}^c = \{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ni \mathbf{Z} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) : z\mathbf{Z} = (x\mathbf{u} - y\mathbf{v}, y\mathbf{u} + x\mathbf{v}); \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}\}$$

Este espaço é decomponível numa soma directa $V_{\mathbb{R}}^c = W \oplus \overline{W}$.

B.3 Estrutura Simplética

DEFINIÇÃO [B.6]

Uma estrutura **SIMPLÉTICA** num espaço vectorial real $V_{\mathbb{R}}$ é uma forma bilinear ω em $V_{\mathbb{R}}$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{ANTI-SIMÉTRICA} & : \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \\ \text{NÃO-DEGENERADA} & : \omega(\mathbf{X}, \cdot) = 0 \iff \mathbf{X} = 0 \end{array} \right.$$

Esta estrutura tem como **SIMETRIAS** o grupo simplético $Sp(n)$ com $n = \frac{1}{2} \text{DIM}(V_{\mathbb{R}})$.

- Se escrevermos ω em forma matricial $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}^T \mathbf{W} \mathbf{Y}$, existe uma base (**SIMPLÉTICA**) de V na qual $\mathbf{W} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
- Uma transformação $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \text{AUT}[V]$ deixa a estrutura simplética invariante sse se verificar $\mathbf{S}^T \mathbf{W} \mathbf{S} = \mathbf{W}$ ou seja, na dita base simplética, $\mathbf{S}^T \mathbf{J} \mathbf{S} = \mathbf{J}$, o que significa $A^T D - C^T A = 1$, com $A^T C$ e $B^T D$ simétricas.

APÊNDICE C

TÓPICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

Contents

C.1	Álgebras e Operadores Auto-Adjuntos em Espaços de Hilbert	209
	Operador Adjunto	209
	Família Espectral	210
	O Teorema Espectral	211

C.1 Álgebras e Operadores Auto-Adjuntos em Espaços de Hilbert

I – OPERADOR ADJUNTO

DEFINIÇÃO [C.1]

Seja $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ um operador **DENSAMENTE DEFINIDO** num espaço de Hilbert \mathcal{H} (i.e. $\overline{\mathcal{D}(A)} \equiv \mathcal{H}$). Designemos por $\mathcal{D}(A^*)$ o conjunto (não necessariamente denso)

$$\mathcal{D}(A^*) = \{\psi \in \mathcal{H} : |\langle \psi, A\phi \rangle| \leq c\|\phi\|, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}\}$$

Pelo **LEMA DE RIESZ**, para cada $\psi \in \mathcal{D}(A^*)$ existe um **ÚNICO** $A^*\psi \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle A^*\psi, \phi \rangle = \langle \psi, A\phi \rangle; \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

A^* diz-se o **OPERADOR ADJUNTO** de A .

- Um espaço diz-se **SEPARÁVEL** se possui um sub-conjunto **NUMERÁVEL DENSO** de pontos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **OU** se o espaço possui uma base **NUMERÁVEL DE ABERTOS**.
- A^* , o operador adjunto de A , é unicamente definido se e só se $\mathcal{D}(A)$ é **DENSO** em \mathcal{H} .
- Um sub-espaço $S \subset \mathcal{H}$ é **DENSO** em \mathcal{H} se e só se $\nexists \psi \in \mathcal{H} : \psi \neq 0 \text{ \& } \psi \perp S$.
- O operador A designa-se:

[SIMÉTRICO]

se $A \subset A^*$, ou seja o grafo de A , definido pelo conjunto $\Gamma(A) = \{\phi, A\phi\}_{\phi \in \mathcal{D}(A)}$, está contido no de $A^* : \Gamma(A) \subset \Gamma(A^*)$

[AUTO-ADJUNTO (A.A.)]

se $A = A^*$, ou seja A e A^* não só têm valores iguais, como o seu domínio é o mesmo.

[ESSENCIALMENTE A.A.]

se $A^* = A^{**}$, ou seja A tem uma única extensão Auto-Adjunta. Um operador A é **ESSENCIALMENTE AUTO-ADJUNTO** se e só se é **SIMÉTRICO** e $A^*\psi = \pm i\psi$ implica $\psi = 0$.

II – FAMÍLIA ESPECTRAL

DEFINIÇÃO [C.2]

Qualquer função operatorial $P : \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow P_\lambda$ designa-se uma **FAMÍLIA ESPECTRAL** se:

C.2-i. P_λ for uma **PROJECCÃO** ;

C.2-ii. $\|P_\lambda \psi\| \leq \|P_\mu \psi\|$ quando $\lambda < \mu$, $\forall \psi \in \mathcal{H}$;

C.2-iii. $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|P_\lambda \psi\| = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|P_\lambda \psi - \psi\|$;

C.2-iv. $\forall \psi \in \mathcal{H}$, $P_\lambda \psi$ é contínua à direita, i.e. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|P_{\lambda+\epsilon} \psi - P_\lambda \psi\| = 0$.

- Qualquer operador de projecção é **HERMITIANO** e verifica $P^2 = P$.
- **O ESPECTRO** de um operador $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ é o conjunto de valores complexos $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ definido pela condição $\lambda \in \sigma(A) \iff$ Não Existe $(A - \lambda I)^{-1}$.
- O espectro dum operador não distingue entre operadores muito diferentes.
- Se A for **AUTO-ADJUNTO** o seu espectro é real, $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
- Qualquer sistema ortonormal num espaço de Hilbert \mathcal{H} é **FINITO** ou **NUMERÁVEL**.
- Um sistema ortonormal diz-se **COMPLETO** se não existe nenhum vector $\psi \neq 0$ que seja ortogonal a todos os vectores no sistema ($\psi \perp \mathcal{H} \Rightarrow \psi = 0$).
- A norma de um operador A define-se como $\|A\| = \min(c)$ tal que $\forall \psi \in \mathcal{H}$, $\|A\psi\| \leq c \|\psi\|$.
- Um operador A definido em \mathcal{H} diz-se **LIMITADO** se existe uma constante $c < \infty$ tal que $\forall \psi \in \mathcal{H}$, $\|A\psi\| \leq c\|\psi\|$.

- Qualquer operador limitado A é **CONTÍNUO**.
- Qualquer operador de projecção é **LIMITADO** porque $\|P\psi\| \leq \|\psi\|$.

III – O TEOREMA ESPECTRAL

TEOREMA [C.3]

Para todo o operador A **AUTO-ADJUNTO** existe uma única **FAMÍLIA ESPECTRAL** $\{P_\lambda\}$ que verifica:

$$\text{C.3 - i.} \quad \psi \in \mathcal{D}(A) \iff \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\|P_\lambda \psi\|^2 < \infty$$

$$\text{C.3 - ii.} \quad A\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP_\lambda \psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A)$$

APÊNDICE D

ESTRUTURAS DIFERENCIÁVEIS

Contents

D.1 Atlas em Variedades	213
Cartas Compatíveis	213
Atlas C^r	213
Variedade Topológica, Analítica	214

D.1 Atlas em Variedades

I – CARTAS COMPATÍVEIS

DEFINIÇÃO [D.1]

Duas cartas locais (\mathcal{U}, η) e (\mathcal{U}', η') em M são C^r -**COMPATÍVEIS SSE** (se e só se) têm imagens no mesmo \mathbb{R}^n e as **FUNÇÕES DE TRANSIÇÃO** $\eta(0)\eta'^{-1}$ e $\eta'(0)\eta^{-1}$ são C^r -difeomorfismos ($0 \leq r \in \mathbb{N}$, $r = \infty$ ou $r = \omega$).

EXEMPLO [D.2]

Como exemplo de cartas locais **NÃO-COMPATÍVEIS** considere-se o caso $M = \mathbb{R}$ e os dois atlas de uma só carta, $\mathcal{A}_R = (\mathbb{R}, \eta \mid \eta(x) = x^3)$ e $\mathcal{A}'_R = (\mathbb{R}, \eta' \mid \eta'(x) = x)$ para os quais $\eta'(0)\eta^{-1}(s) = s^{1/3}$ não é diferenciável em $x = 0$.

II – ATLAS C^r

DEFINIÇÃO [D.3]

Um C^r -**ATLAS** de M é um conjunto $\mathcal{A}_M^r = \{(\mathcal{U}_i, \eta_i)\}_{i \in I}$ de cartas C^r -**COMPATÍVEIS** que cobrem M , i.e. $M = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$. Dois C^r -Atlas de M são **COMPATÍVEIS** ou **EQUIVALENTES SSE** a sua união for um C^r -Atlas.

III – VARIEDADE TOPOLÓGICA, ANALÍTICA

DEFINIÇÃO [D.4]

O par (M, \mathcal{A}_M^r) designa-se uma **VARIEDADE C^r -DIFERENCIÁVEL**, (**TOPOLÓGICA** se C^0 -diferenciável, **ANALÍTICA** se C^ω -diferenciável).

Uma **ESTRUTURA C^r -DIFERENCIÁVEL** de M é um C^r -Atlas completo $\overline{\mathcal{A}}_M^r$, i.e. um C^r -Atlas que contém **TODOS** os C^r -Atlas compatíveis de M .

- Dado um C^r -Atlas \mathcal{A}_M^r de M , existe um único atlas completo $\overline{\mathcal{A}}_M^r$ que o contém, e que é o conjunto de **TODAS** as cartas locais (\mathcal{U}, η) que são C^r -compatíveis com as cartas locais em \mathcal{A}_M^r . Qualquer C^r -Atlas que contenha \mathcal{A}_M^r está por definição contido em $\overline{\mathcal{A}}_M^r$. Vemos pois que, embora uma estrutura C^r -diferenciável seja equivalente a um atlas completo $\overline{\mathcal{A}}_M^r$, qualquer C^r -Atlas \mathcal{A}_M^r de M determina únivocamente uma estrutura C^r -diferenciável sobre M . Basta-nos portanto especificar o menor dos C^r -Atlas contidos num dado atlas completo $\overline{\mathcal{A}}_M^r$ para definir uma variedade C^r -diferenciável.
- Note que um C^r -Atlas \mathcal{A}_M^r induz, tal como um atlas \mathcal{A}_M^0 , uma topologia em M , dita **TOPOLOGIA DE VARIEDADE C^r** . Com efeito, um C^r -difeomorfismo é antes do mais um homeomorfismo, e portanto, por razões idênticas às que invocámos no caso dos atlas $\overline{\mathcal{A}}_M^0$, temos a
- Qualquer atlas completo de uma variedade C^1 -diferenciável contém um atlas único de classe C^r , para $r \in \mathbb{N}$, $r = \infty$ ou $r = \omega$. Não é por isso muito ambicioso assumir C^∞ estrutura por princípio.
- Se apenas considerarmos a continuidade das funções de transição na definição de compatibilidade de cartas locais, obtemos uma **VARIEDADE TOPOLÓGICA**, ou de classe C^0 . Há exemplos de variedades topológicas que não admitem qualquer estrutura diferenciável, e em geral, quando é possível construir uma variedade diferenciável numa topológica, o resultado não é único. Os resultados da alínea anterior não se estendem portanto para o caso C^0 .

PROPOSIÇÃO [D.5]

O conjunto $\{\mathcal{U}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ dos domínios de cartas locais dum C^r -Atlas completo $\overline{\mathcal{A}}_M^r$ forma uma **BASE DE TOPOLOGIA** em M .

- Dotar o **ESPAÇO TOPOLÓGICO** (M, \mathcal{T}) dum estrutura C^r -diferenciável significa dotar o **CONJUNTO** M dum atlas \mathcal{A}_M^r tal que \mathcal{T} coincida com a **TOPOLOGIA DE VARIEDADE C^r** induzida por \mathcal{A}_M^r . Esta definição é muito importante para ajudar a perceber que, dadas duas topologias \mathcal{T} e $\tilde{\mathcal{T}}$ em M , pode acontecer que espaço topológico (M, \mathcal{T}) não admita nenhuma estrutura C^r -diferenciável, muito embora $(M, \tilde{\mathcal{T}})$ possa admitir várias.

Dado que uma variedade C^1 -diferenciável pode ser sempre dotada de uma única estrutura C^∞ -diferenciável, vamos considerar daqui por diante apenas o caso $r = \infty$ e omitir, em consequência, qualquer referência à classe de diferenciabilidade dos atlas e outros objectos definidos sobre M . Vejamos agora alguns resultados destas definições. Em primeiro lugar, vamos definir o conceito de **APLICAÇÃO DIFERENCIÁVEL** entre variedades diferenciáveis.

DEFINIÇÃO [D.6]

Dadas duas variedades diferenciáveis (M, \mathcal{A}_M) e $(\tilde{M}, \mathcal{A}_{\tilde{M}})$, de dimensões respectivamente $\text{DIM}(M) = n$ e $\text{DIM}(\tilde{M}) = \tilde{n}$, uma aplicação $f : M \rightarrow \tilde{M}$ é **DIFERENCIÁVEL** num ponto $m \in M$ se, dadas cartas locais $(\mathcal{U}, \eta) \in \mathcal{A}_M$ e $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\eta}) \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, cobrindo respectivamente $m \in M$ e $f(m) \in \tilde{M}$, a função $\tilde{\eta}(0)f(0)\eta^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ for diferenciável em $\eta(m) \in \mathbb{R}^n$.

É importante realçar que esta definição é **INDEPENDENTE** da escolha de cartas locais, já que se (D.6) se verificar para $(\mathcal{U}, \eta) \in \mathcal{A}_M$ e $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\eta}) \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, noutras cartas locais $(\mathcal{U}', \eta') \in \mathcal{A}_M$ e $(\tilde{\mathcal{U}}', \tilde{\eta}') \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$ sobre os mesmos pontos temos

(D-1)
$$\tilde{\eta}'(0)f(0)\eta'^{-1} = (\tilde{\eta}'(0)\tilde{\eta}^{-1})(0)(\tilde{\eta}(0)f(0)\eta^{-1})(0)(\eta(0)\tilde{\eta}'^{-1})$$

que é também diferenciável dado que, por hipótese,

$$\begin{aligned} \eta(0)\tilde{\eta}'^{-1} : \mathbb{R}^{\tilde{n}} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \tilde{\eta}'(0)\tilde{\eta}^{-1} : \mathbb{R}^{\tilde{n}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\tilde{n}} \end{aligned}$$

são diferenciáveis.

DEFINIÇÃO [D.7]

Uma **INJECCÃO** $f : M \rightarrow \tilde{M}$ chama-se um **DIFEOMORFISMO** se f e f^{-1} forem diferenciáveis.

Duas variedades diferenciáveis (M, \mathcal{A}_M) e $(\tilde{M}, \mathcal{A}_{\tilde{M}})$ dizem-se **DIFEOMORFAS** se existir um difeomorfismo **GLOBAL** entre M e \tilde{M} .

EXEMPLO [D.8]

Os dois atlas não-equivalentes $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{A}'_{\mathbb{R}}$ dados no exemplo anterior são difeomorfos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^3 \end{aligned}$$

é um difeomorfismo global já que $(\eta'(0)f(0)\eta^{-1})(x) = x$.

Seja $f : M \rightarrow \tilde{M}$ uma aplicação diferenciável. Em coordenadas locais $(\mathcal{U}, \eta) \in \mathcal{A}_M$ e $(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\eta}) \in \mathcal{A}_{\tilde{M}}$, a aplicação f traduz-se em \tilde{n} funções reais de n variáveis reais

$$f^\alpha \equiv \tilde{\eta}^\alpha(0)f(0)\eta^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \tilde{n}).$$

DEFINIÇÃO [D.9]

O "**RANK**" da aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \tilde{M}$ em $m \in M$ é a **CARACTERÍSTICA** da matriz jacobiana

$$Df(m) = \left(\frac{\partial f^\alpha(\eta(m))}{\partial \eta^\beta} \right)$$

onde $\alpha = 1, 2, \dots, \tilde{n}$, $\beta = 1, 2, \dots, n$.

Mais uma vez, note que este conceito é independente das cartas locais escolhidas para calcular o "rank" num ponto $m \in M$ porque, derivando **(D-1)**, vemos que o novo jacobiano se obtém do antigo por composição com isomorfismos (as derivadas dos difeomorfismos de mudança de coordenadas) e portanto f deve ter o mesmo "rank" em todas as cartas locais.

- Uma aplicação $f : M \rightarrow \tilde{M}$ designa-se uma **IMERSÃO** se o seu "rank" é igual à dimensão de M .
- Um sub-conjunto $S \subset \tilde{M}$ diz-se uma **SUB-VARIEDADE** de \tilde{M} se fôr uma variedade S e a injeção natural $\iota : S \rightarrow \tilde{M}$ for uma imersão.

PARTE VII

BIBLIOGRAFIA

PARTE VIII

ÍNDICE

Índice

A		Projectiva	24
C		Topológica	26
Algebra		Grupo	
de Clifford-Dirac	111	Acção dum grupo num conjunto	40
de quaterniões \mathbb{Q}	99	compacto	74
E		Comutador	111
Caracter		Conjunto Transversal	109
1ª Relação de Ortogonalidade	88	de de Sitter $SO(4, 1)$	75
2ª Relação de Ortogonalidade	92	de Galileu	165
Composto	85	de Isotropia	14
duma Representação	85	de Permutações	41
Levantamento	111	de Poincaré	154
Linear de um grupo	83	de quaterniões \mathbb{Q}	99
Simples	85	de rotações em torno da origem	154
tabela de caracteres de A_4	115	de translações do plano	154
tabela de caracteres de T_0	192	Derivado	111
tabela de caracteres de T_d	192	Dicíclico	111
tabela de caracteres de S_3	92	dual \hat{G}	83
Classes		Euclideano	154
de Conjugação	47	Euclideano $O(3) \times \mathbb{R}^3$	76
de Conjugação de S_n	49	Factor	44
de Conjugação de \mathbb{Q}	99	Lorentz $O(3, 1)$	75
F		Medidas invariantes	139
Equação		não-compacto	75
Ciclotómica	15	Nilpotente	166
Cubica	9	ordem de um grupo	14
raízes,	10	Quociente	44
Quártica	11	Representações	70
raízes,	13	Resolúvel	45
Equação algébrica		Simétrico	13
de grau 3	4	S_n ,	41
G		A_4 ,	114
Geometria		Simples	45, 75
Afim	24	Transformações Lineares	70
Diferencial	26	Unimodular	140
Métrica	25	H	
M		Homomorfismo	
L		isomorfismo	69
M		L	
M		Levantamento	
M		da representação de um sub-grupo	108
M		M	
M		Möbius	
M		Fórmula de Inversão	22
M		Função de	21
M		Inverso de	21

Transformada de Maurer-Cartan	21
Método	165
Medida	
Haar	140
invariante	139

O

Operador de Projecção	84
-----------------------	----

P

Permutação	
Regular	41
Semi-Regular	41

R

Representação	
Adjunta	165
Co-Adjunta	165
Completamente Redutível	76
de um grupo	69
Dimensão de uma	70
Induzida por outra	109
Levantamento	108
Regular	90
Representações	
equivalentes	73
redutíveis	73
unitarias	73
Resolvente	
Equação resolvente da cúbica	10
Equação resolvente da quártica	11, 12

S

Série	
Invariante	45
Schur	
1º Lema	79
2º Lema	80
Sub-grupo	
Índice de um	44
Normal	43
Próprio	43

T

Teorema	
Burnside	90
Cayley	46
de Lagrange	14
Lagrange	44
Maschke	77
Transformações	
Lineares Fraccionáris	161

V

Variedade	
C^r -diferenciável	214
Analítica	214
Atlas	
C^r ,	213
Completo,	214
Equivalentes,	213
Topológica	214

Y

Young	
Diagramas	49